Le problème du mois :

Nous avons déjà eu l'occasion de souhaiter la bienvenue aux quelques 25 nouveaux usaniens de rang 255 et inscrits pour 2001. L'un d'entre eux, Roman Sapatshev, nous vient du club spéléo de Saint-Petersbourg ; vous savez... cette ville russe à la pointe du golfe de Finlande dans la mer Baltique. Sachant que les coordonnées géographiques de la mairie de cette ville sont 59°55' de latitude Nord et 30°15' de longitude Est et que celles de l'Hôtel de ville de Nancy sont 48°41' de latitude Nord et 6°12' de longitude Est, en déduire la distance kilométrique « à vol d'oiseau » entre ces deux établissements.

À propos du problème du mois : distance angulaire et distance métrique

Considérons deux points A et B de la surface de la terre supposée être une sphère parfaite de centre O. On appelle distance angulaire de A à B l'angle non orienté entre les rayons OA et OB. Cet angle noté p est compris entre 0 et 180°. La distance métrique notée d de A à B est la distance entre A et B mesurée en mètres sur le grand cercle de la sphère passant par les points A et B. Cette distance est donc comprise entre 0 et 20 000 km (le tour de la terre mesurant 40 000 000 m par définition du mètre). Le lien entre p et d est donné par la formule : 1 000 x p = 9 x d (p en degrés et d en kilomètres). Ainsi, par exemple, si A et B sont distants de p = 1' (i.e. 1 minute d'arc ou un soixantième de degré d'angle), leur distance métrique est d = 1/9 x 1000 x 1/60 = 1,852 km ou 1 852 m soit par définition 1 mille nautique international.

<u>LA LATITUDE</u> : On appelle latitude d'un point A de la surface de la terre l'angle noté L(A) que fait la verticale au point A (ie. le rayon OA) avec le plan de l'équateur. Cet angle est compris entre 0 et 90°. On doit préciser en plus la nature de l'hémisphère (nord : N, ou sud : S), auquel il se réfère. La distance angulaire a du point A au pôle nord P (i.e. l'angle entre les rayons OA et OP), est sa colatitude. Si L(A) est la latitude de A alors on a : a = 90 - L(A) pour l'hémisphère nord et a = 90 + L(A) pour l'hémisphère sud. Cet angle est compris entre 0 et 90° pour l'hémisphère nord et entre 90 et 180° pour l'hémisphère sud.

<u>LA LONGITUDE</u> : On appelle longitude d'un point A de la surface de la terre l'angle noté l(A) que fait le plan du méridien passant par le point A (c'est-à-dire le plan du grand cercle de la sphère passant par les points A et P) avec le plan du méridien de Greenwitch pris arbitrairement comme méridien origine. Cet angle est compris entre 0 et 180°. On doit préciser en plus la situation du point A relativement à Greenwitch : à l'ouest (W) ou à l'est (E).

<u>UN DÉBUT DE SOLUTION</u> : Considérons 2 points A et B pris sur la surface de la terre. Ils définissent avec le pôle nord P un triangle dit sphérique et noté APB. L'angle au sommet P de ce triangle, est défini comme l'angle (encore) noté q compris entre 0 et 180° entre les plans des méridiens passant respectivement par A et B.

- Si A et B sont du « même côté » relativement à Greenwitch (c'est-à-dire tous les deux à l'ouest ou tous les deux à l'est) on a : q = | l(A) - l(B) |,
- si A et B sont de « chaque côté » relativement à Greenwitch (c'est-à-dire l'un à l'ouest et l'autre à l'est) avec 0° < l(A) + l(B) < 180° alors on a : q = l(A) + l(B) et
- si A et B sont de « chaque côté » relativement à Greenwitch avec 180° < l(A) + l(B) < 360° alors on a : q = 360 - [l(A) + l(B)].

Connaissant les distances angulaires a de P à A et b de P à B (c'est-à-dire les colatitudes de A et B respectivement) ainsi que l'angle q au sommet P du triangle sphérique APB on en déduit la distance angulaire p de A à B à l'aide de la relation fondamentale de trigonométrie sphérique pour la résolution des triangles sphériques :

cos(p) = cos(a)cos(b) + sin(a)sin(b)cos(q). D'où ensuite la distance métrique de A à B.

Solution du problème de distance entre Nancy et St-Petersbourg

On a :

- pour Nancy (A) : L(A) = 48°41'N et l(A) = 6°12'E ,
- pour Saint-Pétersbourg (B) : L(B) = 59°55'N et l(B) = 30°15'E .

D'où :

- a = 90 - L(A) = 90° - 48°41' = 41°19' ,
- b = 90 - L(B) = 90° - 59°55' = 30°5' et
- q = | l(A) - l(B) | = | 6°12' - 30°15' | = | -24°3' | = 24°3' .

La distance angulaire p entre A et B est telle que : cos(p) = cos(a)cos(b) + sin(a)sin(b)cos(q) = cos(41°19') x cos(30°5') + sin(41°19') x sin(30°5') x cos(24°3') = 0,952 113 02

et on en tire *p* = 17,803 067 44° = 17°48'11,043".

D'où enfin *d* = 1000 x p / 9 = 1 978 km à 1 km près, erreur due à la répercussion des erreurs sur les coordonnées qui sont de l'ordre maximal de 30" (soit 0,926 km), d'où le résultat suite à un calcul d'erreur.