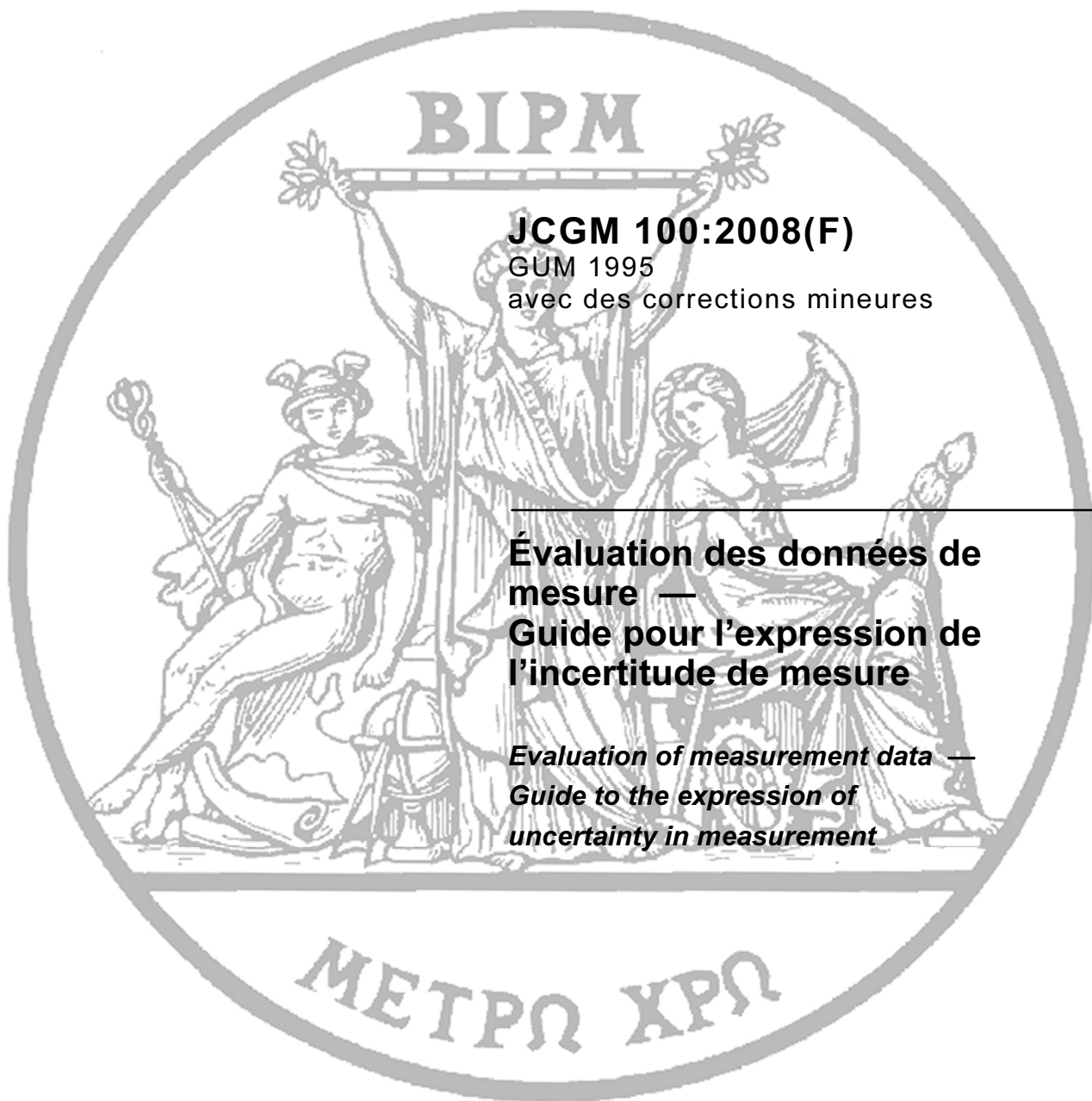




JCGM 100:2008(F)

GUM 1995

avec des corrections mineures

**Évaluation des données de
mesure —
Guide pour l'expression de
l'incertitude de mesure**

*Evaluation of measurement data —
Guide to the expression of
uncertainty in measurement*

Première édition septembre 2008

© JCGM 2008

Document produced by Working Group 1 of the Joint Committee for Guides in Metrology (JCGM/WG 1).

Copyright of this document is shared jointly by the JCGM member organizations (BIPM, IEC, IFCC, ILAC, ISO, IUPAC, IUPAP and OIML).

Document produit par le Groupe de travail 1 du Comité commun pour les guides en métrologie (JCGM/WG 1).

Les droits d'auteur relatifs à ce document sont la propriété conjointe des organisations membres du JCGM (BIPM, CEI, IFCC, ILAC, ISO, UICPA, UIPPA et OIML).

Copyrights

Even if the electronic version of the 2008 edition of the GUM is available free of charge on the BIPM's website (www.bipm.org), copyright of this document is shared jointly by the JCGM member organizations, and all respective logos and emblems are vested in them and are internationally protected. Third parties cannot rewrite or re-brand, issue or sell copies to the public, broadcast or use on-line this edition of the GUM. For all commercial use, reproduction or translation of this document and/or of the logos, emblems, publications or other creations contained therein, the prior written permission of the Director of the BIPM must be obtained.

Droits d'auteur

Même si une version électronique de l'édition 2008 du GUM peut être téléchargée gratuitement sur le site internet du BIPM (www.bipm.org), les droits d'auteur relatifs à ce document sont la propriété conjointe des organisations membres du JCGM et l'ensemble de leurs logos et emblèmes respectifs leur appartiennent et font l'objet d'une protection internationale. Les tiers ne peuvent réécrire ou modifier, distribuer ou vendre des copies au public, diffuser ou mettre en ligne, l'édition 2008 du GUM. Tout usage commercial, reproduction ou traduction de ce document et/ou des logos, emblèmes et/ou publications qu'il comporte, doit recevoir l'autorisation écrite préalable du directeur du BIPM.



JCGM 100:2008

GUM 1995 avec des corrections mineures

Évaluation des données de mesure — Guide pour l'expression de l'incertitude de mesure

Evaluation of measurement data — Guide to the expression of uncertainty in measurement

Les droits d'auteur du présent document, élaboré sous la conduite du JCGM, appartiennent conjointement aux organisations membres du JCGM (BIPM, CEI, FICC, ILAC, ISO, OIML, UICPA et UIPPA).

Droits d'auteur

Les droits économiques et moraux attachés aux publications du JCGM font l'objet d'une protection internationale, même si des versions électroniques peuvent en être téléchargées gratuitement sur les sites internet d'une ou de plusieurs organisations membres du JCGM. Les tiers ne sont pas autorisés, sans accord écrit du JCGM, à réécrire ou à modifier ses publications, à vendre des copies au public, ni à diffuser ou à mettre en ligne ses publications. De même, le JCGM s'oppose aux altérations, ajouts et censures qui pourraient être faits à ses publications, y compris à ses titres, slogans ou logos, et ceux de ses organisations membres.

Versions faisant foi et traductions

Les seules versions qui font foi sont les versions originales des documents publiés par le JCGM, dans leur langue originale.

Les publications du JCGM peuvent faire l'objet de traductions dans d'autres langues que celles dans lesquelles le document a été publié originellement par le JCGM. L'accord du JCGM doit être obtenu avant qu'une traduction puisse être faite. Toutes les traductions doivent respecter le format, les formules et unités originaux et faisant foi (sans aucune conversion de formules ou d'unités) et faire mention de la phrase suivante (devant être traduite vers la langue de traduction):

Tous les travaux du JCGM font l'objet de droits d'auteurs protégés internationalement. La présente traduction du document original du JCGM a été établie avec l'accord du JCGM. Le JCGM conserve l'intégralité des droits d'auteur, protégés internationalement, sur la forme et le contenu de ce document et sur ses titres, slogans ou logos. Les organisations membres du JCGM conservent également l'intégralité des droits, protégés internationalement, sur leurs titres, slogans ou logos contenus dans les publications du JCGM. La seule version qui fait foi est le document publié par le JCGM, dans la langue originale».

Le JCGM ne peut être tenu responsable de la pertinence, de l'exactitude, de l'exhaustivité ou de la qualité des informations ou documentations contenues dans quelque traduction que ce soit. Une copie de la traduction doit être adressée au JCGM.

Reproduction

Les publications du JCGM peuvent être reproduites, sous réserve d'obtenir l'accord écrit du JCGM. Un exemplaire de tout document reproduit doit être adressé au JCGM et doit faire mention de la phrase suivante:

Ce document est reproduit avec l'accord du JCGM qui conserve l'intégralité des droits d'auteur, protégés internationalement, sur la forme et le contenu de ce document et sur ses titres, slogans ou logos. Les organisations membres du JCGM conservent également l'intégralité des droits, protégés internationalement, sur leurs titres, slogans ou logos figurant dans les publications du JCGM. Les seules versions qui font foi sont les versions originales des documents publiés par le JCGM.

Exonération de responsabilité

Le JCGM et ses organisations membres ont publié le présent document afin de faciliter l'accès à l'information sur la métrologie. Ils s'efforcent de le mettre à jour régulièrement, mais ne peuvent garantir l'exactitude en tout temps et ne sauraient être tenus pour responsables d'un quelconque dommage, direct ou indirect, pouvant résulter de son utilisation. L'existence de références à des produits du commerce, quels qu'ils soient (y compris, mais non limité à, tous logiciels, données ou matériels) ou de liens vers des sites internet sur lesquels le JCGM et ses organisations membres n'ont aucun contrôle, et pour lesquels ils n'assument aucune responsabilité, ne doit pas être interprétée comme une approbation, un endossement ou une recommandation par le JCGM et ses organisations membres.

Sommaire

Page

Préliminaires	v
Avant-propos	vi
Introduction.....	vii
1 Domaine d'application	1
2 Définitions	2
2.1 Termes métrologiques généraux	2
2.2 Le terme «incertitude»	2
2.3 Termes spécifiques à ce <i>Guide</i>	3
3 Concepts fondamentaux.....	4
3.1 Mesurage	4
3.2 Erreurs, effets et corrections	5
3.3 Incertitude	6
3.4 Considérations pratiques	7
4 Évaluation de l'incertitude-type	8
4.1 Modélisation du mesurage	8
4.2 Évaluation de Type A de l'incertitude-type	10
4.3 Évaluation de Type B de l'incertitude-type	12
4.4 Illustration graphique de l'évaluation de l'incertitude-type	15
5 Détermination de l'incertitude-type composée	19
5.1 Grandeurs d'entrée non corrélées	19
5.2 Grandeurs d'entrée corrélées	21
6 Détermination de l'incertitude élargie	24
6.1 Introduction.....	24
6.2 Incertitude élargie.....	24
6.3 Choix d'un facteur d'élargissement.....	25
7 Expression de l'incertitude.....	25
7.1 Conseils généraux.....	25
7.2 Conseils spécifiques.....	26
8 Récapitulation de la procédure d'évaluation et d'expression de l'incertitude	28
Annexe A Recommandations du Groupe de travail et du CIPM	29
A.1 Recommandation INC-1 (1980)	29
A.2 Recommandation 1 (CI-1981)	30
A.3 Recommandation 1 (CI-1986)	30
Annexe B Termes métrologiques généraux	32
B.1 Origine des définitions.....	32
B.2 Définitions	32
Annexe C Termes et concepts statistiques fondamentaux	40
C.1 Origine des définitions.....	40
C.2 Définitions	40
C.3 Élaboration de termes et de concepts	46
Annexe D Valeur «vraie», erreur et incertitude	50
D.1 Le mesurande	50
D.2 La grandeur réalisée	50
D.3 La valeur «vraie» et la valeur corrigée	50
D.4 Erreur	51

D.5	Incertitude.....	52
D.6	Représentation graphique	52
Annexe E Motivation et fondements de la Recommandation INC-1 (1980)		55
E.1	«Sûr», «aléatoire» et «systématique».....	55
E.2	Justification pour des évaluations réalistes de l'incertitude	55
E.3	Justification pour le traitement identique de toutes les composantes de l'incertitude	56
E.4	Écart-type comme mesure de l'incertitude	59
E.5	Une comparaison entre les deux points de vue sur l'incertitude	61
Annexe F Conseils pratiques pour l'évaluation des composantes de l'incertitude		62
F.1	Composantes évaluées à partir d'observations répétées: évaluation de Type A de l'incertitude-type	62
F.2	Composantes évaluées par d'autres moyens: évaluation de Type B de l'incertitude-type	65
Annexe G Degrés de liberté et niveaux de confiance		72
G.1	Introduction	72
G.2	Théorème central limite	73
G.3	La loi de t et les degrés de liberté	74
G.4	Nombre effectif de degrés de liberté	75
G.5	Autres considérations	77
G.6	Résumé et conclusions.....	78
Annexe H Exemples.....		81
H.1	Étalonnage de calibres à bouts.....	81
H.2	Mesurage simultané d'une résistance et d'une réactance	87
H.3	Étalonnage d'un thermomètre	91
H.4	Mesurage d'activité.....	95
H.5	Analyse de variance	100
H.6	Mesurages par rapport à une échelle de repérage: dureté	106
Annexe J Liste des principaux symboles		111
Bibliographie		115
Index alphabétique		117

Le présent *Guide* établit les règles générales pour l'évaluation et l'expression de l'incertitude de mesure, règles prévues pour s'appliquer à un large éventail de mesurages. Ce *Guide* est fondé sur la Recommandation 1 (CI-1981) du Comité international des poids et mesures (CIPM) et sur la Recommandation INC-1 (1980) du Groupe de travail sur l'expression des incertitudes. Ce groupe de travail avait été constitué par le Bureau international des poids et mesures (BIPM) pour répondre à une demande du CIPM. La Recommandation du CIPM est la seule recommandation concernant l'expression de l'incertitude de mesure qui ait été avalisée par une organisation intergouvernementale.

Le présent *Guide* a été préparé par un groupe de travail mixte composé d'experts désignés par le BIPM, la Commission électrotechnique internationale (CEI), l'Organisation internationale de normalisation (ISO) et l'Organisation internationale de métrologie légale (OIML).

Les sept organisations* suivantes ont apporté leur soutien à l'élaboration du présent *Guide* et il est publié en leur nom:

- BIPM: Bureau international des poids et mesures
- CEI: Commission électronique internationale
- FICC: Fédération internationale de chimie clinique**
- ISO: Organisation internationale de normalisation
- OIML: Organisation internationale de métrologie légale
- UICPA: Union internationale de chimie pure et appliquée
- UIPPA: Union internationale de physique pure et appliquée

Les utilisateurs du présent *Guide* sont invités à adresser leurs commentaires et leurs demandes de clarification à l'une des sept organisations de tutelle dont les adresses postales sont données sur la page 2 de couverture***.

* **Note de bas de page à la version 2008:**

En 2005, la Coopération internationale sur l'agrément des laboratoires d'essais (ILAC) a rejoint officiellement les sept organisations internationales fondatrices.

** **Note de bas de page à la version 2008:**

Le nom de cette organisation a changé depuis 1995. Il s'écrit maintenant:

IFCC: Fédération internationale de chimie clinique et de médecine de laboratoire

*** **Note de bas de page à la version 2008:**

Des liens vers les adresses des huit organisations membres du JCGM (Comité commun pour les guides en métrologie) peuvent être trouvés à l'adresse <http://www.bipm.org/en/committees/jc/jcgm>.

Avant-propos

Le Comité international des poids et mesures (CIPM), la plus haute autorité mondiale en métrologie, a reconnu en 1977 le manque de consensus international dans l'expression de l'incertitude de mesure. Il a demandé au Bureau international des poids et mesures (BIPM) de traiter le problème de concert avec les laboratoires de métrologie nationaux et d'émettre une recommandation.

Le BIPM a préparé un questionnaire détaillé couvrant les problèmes en cause et l'a diffusé à 32 laboratoires de métrologie nationaux reconnus comme s'intéressant au sujet (et, pour information, à cinq organisations internationales). Au début de 1979, 21 laboratoires avaient répondu [\[1\]](#) ¹⁾. Presque tous les laboratoires reconnaissaient l'importance d'arriver à une procédure acceptée internationalement pour exprimer l'incertitude de mesure et pour combiner les composantes individuelles de l'incertitude en une seule incertitude globale. Toutefois, il n'y avait pas de consensus apparent sur la méthode à utiliser. En conséquence, le BIPM a organisé une réunion qui avait pour objectif d'arriver à une procédure uniforme et généralement acceptable pour la spécification de l'incertitude. Des experts de 11 laboratoires nationaux de métrologie ont participé à cette réunion. Ce Groupe de travail sur l'expression des incertitudes a préparé la Recommandation INC-1 (1980), Expression des incertitudes expérimentales [\[2\]](#). Le CIPM a approuvé la Recommandation en 1981 [\[3\]](#) et l'a reconfirmée en 1986 [\[4\]](#).

Le CIPM s'en est remis à l'Organisation internationale de normalisation (ISO) pour développer un guide détaillé fondé sur la Recommandation du Groupe de travail (qui est un bref canevas plutôt qu'une prescription détaillée), l'ISO pouvant mieux, en effet, refléter les besoins provenant des larges intérêts de l'industrie et du commerce.

C'est le groupe technique consultatif (TAG 4) sur la métrologie qui a été chargé de cette responsabilité, car l'une de ses tâches consiste à coordonner l'élaboration de lignes directrices relatives aux problèmes de mesurage qui sont d'intérêt commun à l'ISO et aux six organisations qui participent, avec l'ISO, au travail du TAG 4, à savoir: la Commission électrotechnique internationale (CEI), partenaire de l'ISO pour la normalisation au niveau mondial; le CIPM et l'Organisation internationale de métrologie légale (OIML), qui sont les deux organisations mondiales de la métrologie; l'Union internationale de chimie pure et appliquée (UICPA) et l'Union internationale de physique pure et appliquée (UIPPA), qui représentent la chimie et la physique; et la Fédération internationale de chimie clinique (FICC).

Le TAG 4 a constitué à son tour le Groupe de travail 3 (ISO/TAG 4/GT 3) composé d'experts désignés par le BIPM, la CEI, l'ISO et l'OIML et nommés par le Président du TAG 4. Son mandat est le suivant:

Développer un guide, fondé sur la recommandation du Groupe de travail BIPM sur l'expression des incertitudes, qui fournisse des règles pour l'expression de l'incertitude de mesure, utilisables en normalisation, dans l'étalonnage, dans l'accréditation des laboratoires et dans les services de métrologie.

L'objectif d'un tel guide est de

- contribuer à une information complète sur la manière dont on aboutit à l'expression de l'incertitude;
- fournir une base pour la comparaison internationale des résultats de mesure.

1) Voir la [Bibliographie](#).

*** Note de bas de page à la version 2008:**

Lors de l'élaboration de la présente version 2008 du GUM, seules les corrections jugées nécessaires par rapport à la version papier de 1995 ont été introduites par le JCGM/WG 1. Elles concernent les paragraphes 4.2.2, 4.2.4, 5.1.2, B.2.17, C.3.2, C.3.4, E.4.3, H.4.3, H.5.2.5 et H.6.2.

Introduction

0.1 Lorsqu'on rend compte du résultat d'un mesurage d'une grandeur physique, il faut obligatoirement donner une indication quantitative sur la qualité du résultat pour que ceux qui l'utiliseront puissent estimer sa fiabilité. En l'absence d'une telle indication, les résultats de mesure ne peuvent pas être comparés, soit entre eux, soit par rapport à ces valeurs de référence données dans une spécification ou une norme. Aussi est-il nécessaire qu'il existe une procédure facilement applicable, aisément compréhensible et largement acceptée pour caractériser la qualité du résultat d'un mesurage, c'est-à-dire pour évaluer et exprimer son *incertitude*.

0.2 Le concept d'*incertitude* comme attribut quantifiable est relativement nouveau dans l'histoire de la mesure bien que l'*erreur* et l'*analyse des erreurs* soient des concepts depuis longtemps pratiqués dans la science de la mesure, c'est-à-dire en métrologie. On reconnaît maintenant largement que, lorsqu'on a évalué la totalité des composantes de l'erreur connues ou soupçonnées et que les corrections appropriées ont été appliquées, il subsiste encore une incertitude sur la validité du résultat exprimé, c'est-à-dire un doute sur la manière dont le résultat de mesure représente correctement la valeur de la grandeur mesurée.

0.3 De même que l'utilisation quasi universelle du Système international d'unités (SI) a apporté la cohérence pour tous les mesurages scientifiques et technologiques, de même un consensus universel sur l'évaluation et l'expression de l'incertitude de mesure permettrait la compréhension aisée et l'interprétation correcte d'un vaste spectre de résultats de mesure en science, ingénierie, commerce, industrie et réglementation. À notre époque de développement mondial du commerce, il est impératif que la méthode d'évaluation et d'expression des incertitudes soit uniforme dans le monde entier pour pouvoir comparer facilement des mesurages effectués dans des pays différents.

0.4 La méthode idéale d'évaluation et d'expression de l'incertitude du résultat d'un mesurage devrait être:

- *universelle*: la méthode devrait pouvoir s'appliquer à tous les types de mesurages et à tous les types de données d'entrée utilisées dans les mesurages.

La grandeur effectivement utilisée pour exprimer l'incertitude devrait être:

- *logique en elle-même*: elle devrait pouvoir se déduire directement des composantes constitutives tout en étant indépendante du groupement de ces composantes ou de leur décomposition en sous-composantes;
- *transférable*: l'incertitude évaluée pour un résultat devrait pouvoir être utilisée directement comme composante dans l'évaluation de l'incertitude d'un autre mesurage où l'on utilise le premier résultat.

De plus, dans de nombreuses applications industrielles et commerciales de même que dans les domaines de la santé et de la sécurité, il est souvent nécessaire de fournir, autour du résultat d'un mesurage, un intervalle dont on puisse s'attendre à ce qu'il comprenne une fraction élevée de la distribution des valeurs qui pourraient raisonnablement être attribuées au mesurande. Aussi, la méthode idéale d'évaluation et d'expression de l'incertitude de mesure devrait pouvoir fournir aisément un tel intervalle, en particulier avec une probabilité ou un niveau de confiance qui corresponde d'une manière réaliste à ce qui est exigé.

0.5 L'approche de base de ce *Guide* est celle qui est esquissée dans la Recommandation INC-1 (1980) [2] du Groupe de travail sur l'expression des incertitudes, constitué par le BIPM en réponse à une demande du CIPM (voir l'*Avant-propos*). Cette approche, dont la justification est développée en Annexe E, satisfait toutes les exigences exposées ci-dessus. Cela n'est pas le cas pour la plupart des autres méthodes d'usage courant. La Recommandation INC-1 (1980) a été approuvée et réaffirmée par le CIPM dans ses propres Recommandations 1 (CI-1981) [3] et 1 (CI-1986) [4]. Le texte original en français des Recommandations du CIPM est donné en Annexe A (voir respectivement A.2 et A.3). Comme la Recommandation INC-1 (1980) sert de fondement au présent document, elle est donnée ci-après en 0.7. L'original français, qui fait autorité, est donné en A.1 dans les deux versions, française et anglaise, du *Guide*.

0.6 L'Article [8](#) du présent *Guide* donne un résumé succinct de la procédure spécifiée pour évaluer et exprimer l'incertitude de mesure et l'Annexe [H](#) présente en détail un certain nombre d'exemples. Les autres annexes traitent des termes généraux de métrologie (Annexe [B](#)), des termes et concepts statistiques fondamentaux (Annexe [C](#)), de la valeur «vraie», de l'erreur et de l'incertitude (Annexe [D](#)), des suggestions pratiques pour évaluer les composantes de l'incertitude (Annexe [E](#)), des degrés de liberté et niveaux de confiance (Annexe [G](#)), des symboles mathématiques principaux utilisés dans le document (Annexe [J](#)), et des références bibliographiques ([Bibliographie](#)). Un [Index alphabétique](#) complète le document.

0.7 Recommandation INC-1 (1980) Expression des incertitudes expérimentales

- 1) L'incertitude d'un résultat de mesure comprend généralement plusieurs composantes qui peuvent être groupées en deux catégories d'après la méthode utilisée pour estimer leur valeur numérique:

A. celles qui sont évaluées à l'aide de méthodes statistiques,

B. celles qui sont évaluées par d'autres moyens.

Il n'y a pas toujours une correspondance simple entre le classement dans les catégories A ou B et le caractère «aléatoire» ou «systématique» utilisé antérieurement pour classer les incertitudes. L'expression «incertitude systématique» est susceptible de conduire à des erreurs d'interprétation: elle doit être évitée.

Toute description détaillée de l'incertitude devrait comprendre une liste complète de ses composantes et indiquer pour chacune la méthode utilisée pour lui attribuer une valeur numérique.

- 2) Les composantes de la catégorie A sont caractérisées par les variances estimées s_i^2 (ou les «écarts-types» estimés s_i) et les nombres ν_i de degrés de liberté. Le cas échéant, les covariances estimées doivent être données.
- 3) Les composantes de la catégorie B devraient être caractérisées par les variances estimées u_j^2 , qui peuvent être considérées comme des approximations des variances correspondantes dont on admet l'existence. Les termes u_j^2 peuvent être traités comme des variances et les termes u_j comme des écarts-types. Le cas échéant, les covariances doivent être traitées de façon analogue.
- 4) L'incertitude composée devrait être caractérisée par la valeur obtenue en appliquant la méthode usuelle de combinaison des variances. L'incertitude composée ainsi que ses composantes devraient être exprimées sous la forme d'«écarts-types».
- 5) Si, pour des utilisations particulières, on est amené à multiplier par un facteur l'incertitude composée afin d'obtenir une incertitude globale, la valeur numérique de ce facteur doit toujours être donnée.

Évaluation des données de mesure — Guide pour l'expression de l'incertitude de mesure

1 Domaine d'application

1.1 Ce *Guide* établit les règles générales pour l'évaluation et l'expression de l'incertitude pour les mesurages qui peuvent être effectués à des niveaux variés d'exactitude et dans de nombreux domaines — de la boutique du commerçant à la recherche fondamentale. C'est pourquoi les principes de ce *Guide* sont prévus pour s'appliquer à un large spectre de mesurages y compris ceux qui sont exigés pour:

- aider à la gestion et à l'assurance de la qualité en production,
- satisfaire aux lois et réglementations et les appliquer,
- mener des recherches fondamentales et des recherches et développement appliqués en science et ingénierie,
- étalonner des étalons et instruments et réaliser des essais dans le cadre d'un système de mesure national pour obtenir la traçabilité aux étalons nationaux,
- développer, maintenir et comparer des étalons physiques de référence internationaux et nationaux, en y incluant les matériaux de référence.

1.2 Ce *Guide* concerne en premier lieu l'expression de l'incertitude de mesure d'une grandeur physique bien définie — le mesurande — qui peut être caractérisée en première approximation par une valeur unique. Si le phénomène auquel on s'intéresse peut seulement se représenter par une distribution de valeurs ou s'il est fonction d'un ou de plusieurs paramètres, tel le temps, les mesurandes nécessaires à sa description sont alors l'ensemble des grandeurs décrivant cette distribution ou cette fonctionnalité.

1.3 Ce *Guide* s'applique aussi à l'évaluation et à l'expression de l'incertitude associée aux études conceptuelles et à l'analyse théorique d'essais, de méthodes de mesure et de composantes et systèmes complexes. Comme un résultat de mesure et son incertitude peuvent être de nature conceptuelle et entièrement fondés sur des données hypothétiques, c'est dans ce contexte plus large qu'on doit interpréter le terme «résultat de mesure» tel qu'il est utilisé dans ce *Guide*.

1.4 Ce *Guide* fournit des règles générales pour l'évaluation et l'expression de l'incertitude de mesure plutôt que des instructions détaillées, spécifiques à une technique. De plus, il ne traite pas de la manière d'utiliser, pour différents objectifs, l'incertitude d'un résultat de mesure particulier, une fois qu'elle est évaluée, par exemple, tirer des conclusions sur la compatibilité de ce résultat avec d'autres résultats analogues, établir des limites de tolérance pour un procédé de fabrication, décider si l'on peut adopter de manière sûre une certaine ligne de conduite. En conséquence, il peut s'avérer nécessaire de développer des normes spéciales fondées sur ce *Guide* pour traiter les problèmes particuliers de domaines de mesure spécifiques ou les utilisations diverses des expressions quantitatives de l'incertitude.* Ces normes peuvent être des versions simplifiées du présent *Guide*, mais elles doivent comprendre le degré de détail approprié au niveau d'exactitude et de complexité des mesurages et utilisations concernés.

NOTE Il peut se présenter des situations pour lesquelles on peut penser que le concept d'incertitude de mesure n'est pas totalement applicable, par exemple pour la détermination de la fidélité d'une méthode d'essai (voir Référence [5], par exemple).

* **Note de bas de page à la version 2008:**

Depuis la publication initiale de ce *Guide*, plusieurs documents d'application générale ou spécifique ont été publiés. À titre d'information, des recueils non exhaustifs de ces documents peuvent être consultés à l'adresse http://www.bipm.org/en/committees/jc/jcgm/wg1_bibliography.html.

2 Définitions

2.1 Termes métrologiques généraux

Les définitions d'un certain nombre de termes métrologiques généraux concernant ce *Guide*, tels que «grandeur mesurable», «mesurande» et «erreur de mesure» sont donnés en Annexe [B](#). Ces définitions sont extraites du *Vocabulaire international des termes généraux et fondamentaux de métrologie* (VIM)* [\[6\]](#). En complément, l'Annexe [C](#) donne les définitions d'un certain nombre de termes statistiques fondamentaux provenant principalement de la Norme internationale ISO 3534-1 [\[7\]](#). À partir de l'Article [3](#), lorsqu'un de ces termes métrologiques ou statistiques (ou un terme apparenté) est utilisé pour la première fois dans le texte, il est imprimé en caractères gras et la référence du paragraphe dans lequel il est défini est donnée entre parenthèses.

En raison de son importance pour ce *Guide*, la définition du terme métrologique général «incertitude de mesure» est donnée à la fois en Annexe [B](#) et en [2.2.3](#). Les définitions des termes les plus importants, spécifiques de ce *Guide*, sont données de [2.3.1](#) à [2.3.6](#). Dans tous ces paragraphes et dans les Annexes [B](#) et [C](#), l'utilisation de parenthèses pour les mots de certains termes signifie que ces mots peuvent être omis s'il n'y a pas risque de confusion.

2.2 Le terme «incertitude»

Le concept d'incertitude est développé ultérieurement à l'Article [3](#) et en Annexe [D](#).

2.2.1 Le mot «incertitude» signifie doute. Ainsi, dans son sens le plus large, «incertitude de mesure» signifie doute sur la validité du résultat d'un mesurage. Comme on ne dispose pas de plusieurs mots pour ce *concept général* d'incertitude et pour les grandeurs spécifiques qui fournissent des *mesures quantitatives* du concept, par exemple l'écart-type, l'utilisation du mot «incertitude» s'impose pour ces deux sens différents.

2.2.2 Dans ce *Guide*, le mot «incertitude» sans adjectif se réfère à la fois au concept général d'incertitude et à l'expression quantitative d'une mesure de ce concept. Un adjectif approprié est utilisé pour une mesure spécifique déterminée.

2.2.3 La définition formelle du terme «incertitude de mesure» mise au point pour ce *Guide* et adoptée par le VIM:1993, définition 3.9 [\[6\]](#) est la suivante:

incertitude (de mesure)

paramètre, associé au résultat d'un mesurage, qui caractérise la dispersion des valeurs qui pourraient raisonnablement être attribuées au mesurande

NOTE 1 Le paramètre peut être, par exemple, un écart-type (ou un multiple de celui-ci) ou la demi-largeur d'un intervalle de niveau de confiance déterminé.

NOTE 2 L'incertitude de mesure comprend, en général, plusieurs composantes. Certaines peuvent être évaluées à partir de la distribution statistique des résultats de séries de mesurages et peuvent être caractérisées par des écarts-types expérimentaux. Les autres composantes, qui peuvent aussi être caractérisées par des écarts-types, sont évaluées en admettant des lois de probabilité, d'après l'expérience acquise ou d'après d'autres informations.

NOTE 3 Il est entendu que le résultat du mesurage est la meilleure estimation de la valeur du mesurande, et que toutes les composantes de l'incertitude, y compris celles qui proviennent d'effets systématiques, telles que les composantes associées aux corrections et aux étalons de référence, contribuent à la dispersion.

* **Note de bas de page à la version 2008:**

La troisième édition du vocabulaire a été publiée en 2008, sous le titre JCGM 200:2008, *Vocabulaire international de métrologie — Concepts fondamentaux et généraux et termes associés* (VIM).

2.2.4 La définition de l'incertitude de mesure donnée en [2.2.3](#) est une définition opérationnelle qui se focalise sur le résultat de mesure et son incertitude évaluée. Elle n'est cependant pas incompatible avec d'autres concepts d'incertitude de mesure tels que

- mesure de l'erreur possible sur la valeur estimée du mesurande telle que fournie par le résultat d'un mesurage;
- estimation caractérisant l'étendue des valeurs dans laquelle se situe la valeur vraie d'une grandeur mesurée (VIM:1984, définition 3.09).

Bien que ces deux concepts traditionnels soient valables en tant qu'idéaux, ils se focalisent sur des grandeurs *inconnues*: respectivement l'«erreur» du résultat d'un mesurage et la «valeur vraie» du mesurande (par opposition avec sa valeur estimée). Quoi qu'il en soit, quel que soit le *concept* d'incertitude que l'on adopte, une composante d'incertitude est toujours *évaluée* en utilisant les mêmes données et l'information associée. (Voir aussi [E.5](#).)

2.3 Termes spécifiques à ce Guide

En général, les termes qui sont spécifiques à ce *Guide* sont définis lorsqu'ils apparaissent dans le texte pour la première fois. Cependant, les définitions des termes les plus importants sont données ci-après pour permettre de s'y référer aisément.

NOTE Ces termes sont explicités ultérieurement selon les références suivantes: pour [2.3.2](#), voir [3.3.3](#) et [4.2](#); pour [2.3.3](#), voir [3.3.3](#) et [4.3](#); pour [2.3.4](#), voir Article [5](#) et Équations [\(10\)](#) et [\(13\)](#); et, pour [2.3.5](#) et [2.3.6](#), voir Article [6](#).

2.3.1

incertitude-type

incertitude du résultat d'un mesurage exprimée sous la forme d'un écart-type

2.3.2

évaluation de Type A (de l'incertitude)

méthode d'évaluation de l'incertitude par l'analyse statistique de séries d'observations

2.3.3

évaluation de Type B (de l'incertitude)

méthode d'évaluation de l'incertitude par des moyens autres que l'analyse statistique de séries d'observations

2.3.4

incertitude-type composée

incertitude-type du résultat d'un mesurage, lorsque ce résultat est obtenu à partir des valeurs d'autres grandeurs, égale à la racine carrée d'une somme de termes, ces termes étant les variances ou covariances de ces autres grandeurs, pondérées selon la variation du résultat de mesure en fonction de celle de ces grandeurs

2.3.5

incertitude élargie

grandeur définissant un intervalle, autour du résultat d'un mesurage, dont on puisse s'attendre à ce qu'il comprenne une fraction élevée de la distribution des valeurs qui pourraient être attribuées raisonnablement au mesurande

NOTE 1 La fraction peut être considérée comme la probabilité ou le niveau de confiance de l'intervalle.

NOTE 2 L'association d'un niveau de confiance spécifique à l'intervalle défini par l'incertitude élargie nécessite des hypothèses explicites ou implicites sur la loi de probabilité caractérisée par le résultat de mesure et son incertitude-type composée. Le niveau de confiance qui peut être attribué à cet intervalle ne peut être connu qu'avec la même validité que celle qui se rattache à ces hypothèses.

NOTE 3 L'incertitude élargie est appelée *incertitude globale* au paragraphe 5 de la Recommandation INC-1 (1980).

2.3.6

facteur d'élargissement

facteur numérique utilisé comme multiplicateur de l'incertitude-type composée pour obtenir l'incertitude élargie

NOTE Un facteur d'élargissement, k , a sa valeur typiquement comprise entre 2 et 3.

3 Concepts fondamentaux

On peut trouver une présentation complémentaire des concepts fondamentaux dans l'Annexe [D](#) centrée sur les idées de valeur «vraie», d'erreur et d'incertitude et qui comprend des illustrations graphiques de ces concepts, ainsi que dans l'Annexe [E](#) qui approfondit les motifs et les fondements statistiques de la Recommandation INC-1 (1980), base de ce *Guide*. L'Annexe [J](#) est une liste des principaux symboles mathématiques utilisés tout au long du *Guide*.

3.1 Mesurage

3.1.1 L'objectif d'un **mesurage** ([B.2.5](#)) consiste à déterminer la **valeur** ([B.2.2](#)) du **mesurande** ([B.2.9](#)), c'est-à-dire la valeur de la **grandeur particulière** ([B.2.1](#), Note [1](#)) à mesurer. En conséquence, un mesurage commence par une définition appropriée du mesurande, de la **méthode de mesure** ([B.2.7](#)) et de la **procédure de mesure** ([B.2.8](#)).

NOTE Le terme «valeur vraie» (voir Annexe [D](#)) n'est pas utilisé dans ce *Guide* pour la raison donnée en [D.3.5](#); on considère que les termes «valeur d'un mesurande» (ou d'une grandeur) et «valeur vraie d'un mesurande» (ou d'une grandeur) sont deux termes équivalents.

3.1.2 En général, le **résultat d'un mesurage** ([B.2.11](#)) est seulement une approximation ou **estimation** ([C.2.26](#)) de la valeur du mesurande et, de ce fait, est seulement complet lorsqu'il est accompagné par une expression de l'**incertitude** ([B.2.18](#)) de cette estimation.

3.1.3 Dans la pratique, la spécification ou la définition exigée pour le mesurande est dictée par l'**exactitude de mesure** ([B.2.14](#)) exigée pour le mesurage. Le mesurande doit être défini de façon suffisamment complète en rapport avec l'exactitude exigée de sorte que sa valeur soit unique pour tous les objectifs pratiques associés au mesurage. C'est dans ce sens qu'on utilise l'expression «valeur du mesurande» dans ce *Guide*.

EXEMPLE Si l'on doit déterminer la longueur nominale d'une barre d'acier de longueur un mètre au micromètre près, sa spécification doit comprendre la température et la pression auxquelles la longueur est définie. Le mesurande peut alors être spécifié comme, par exemple, la longueur de la barre à 25,00 °C* et 101 325 Pa (avec, en plus, tout autre paramètre de définition jugé nécessaire, tel que la manière de supporter la barre). Cependant, si l'on ne doit déterminer la longueur de la barre qu'au millimètre près, sa spécification ne nécessitera pas la définition d'une température, ou d'une pression, ou de tout autre paramètre.

NOTE Une définition incomplète du mesurande peut entraîner une composante d'incertitude suffisamment grande pour qu'il soit nécessaire de l'inclure dans l'évaluation de l'incertitude du résultat de mesure (voir [D.1.1](#), [D.3.4](#) et [D.6.2](#)).

3.1.4 Dans de nombreux cas, le résultat d'un mesurage est déterminé sur la base de séries d'observations obtenues dans des **conditions de répétabilité** ([B.2.15](#), Note [1](#)).

3.1.5 Les variations entre les observations répétées sont supposées se produire parce que les **grandeurs d'influence** ([B.2.10](#)) qui peuvent affecter le résultat de mesure ne sont pas maintenues parfaitement constantes.

3.1.6 Le modèle mathématique du mesurage qui transforme l'ensemble des observations répétées en résultat de mesure est d'importance critique parce que, en plus des observations, il comporte généralement les différentes grandeurs d'influence qui ne sont pas connues exactement. La nature imparfaite de la connaissance contribue à l'incertitude du résultat de mesure comme le font les variations des observations répétées et toute incertitude associée au modèle mathématique lui-même.

* **Note de bas de page à la version 2008:**

Conformément à la Résolution 10 de la 22e CGPM (2003), «... le symbole du séparateur décimal pourra être le point sur la ligne ou la virgule sur la ligne...». Le JCGM a décidé d'adopter, dans ses documents en anglais, le point sur la ligne. Cependant, dans le présent document, la virgule sur la ligne a été retenue par souci de cohérence avec la version imprimée.

3.1.7 Ce *Guide* traite le mesurande comme un scalaire (une grandeur unique). L'extension à un ensemble de mesurandes interdépendants, déterminés simultanément par le même mesurage, nécessite de remplacer le mesurande scalaire et sa **variance** (C.2.11, C.2.20, C.3.2) par un mesurande vectoriel et une **matrice de covariance** (C.3.5). Ce *Guide* n'envisage ce remplacement que dans les exemples (voir H.2, H.3 et H.4).

3.2 Erreurs, effets et corrections

3.2.1 Un mesurage présente, en général, des imperfections qui occasionnent une **erreur** (B.2.19) pour le résultat de mesure. On envisage traditionnellement qu'une erreur possède deux composantes, à savoir une composante **aléatoire** (B.2.21) et une composante **systématique** (B.2.22).

NOTE Le concept d'erreur est idéal et les erreurs ne peuvent pas être connues exactement.

3.2.2 L'erreur aléatoire provient probablement de variations temporelles et spatiales non prévisibles ou stochastiques de grandeurs d'influence. Les effets de telles variations, appelés ci-après *effets aléatoires*, entraînent des variations pour les observations répétées du mesurande. Bien qu'il ne soit pas possible de compenser l'erreur aléatoire d'un résultat de mesure, elle peut généralement être réduite en augmentant le nombre d'observations. Son **espérance mathématique** ou **valeur espérée** (C.2.9, C.3.1) est égale à zéro.

NOTE 1 L'écart-type expérimental de la moyenne arithmétique d'une série d'observations (voir 4.2.3) *n'est pas* l'erreur aléatoire de la moyenne, bien qu'on le désigne ainsi dans certaines publications. Mais c'est, en fait, une mesure de l'*incertitude* de la moyenne due aux effets aléatoires. La valeur exacte de l'erreur sur la moyenne provenant de ces effets ne peut pas être connue.

NOTE 2 Ce *Guide* prend grand soin de distinguer les termes «erreur» et «incertitude». Ils ne sont pas synonymes mais représentent des concepts complètement différents. Ils ne doivent pas être confondus ou utilisés à tort l'un pour l'autre.

3.2.3 L'erreur systématique, comme l'erreur aléatoire, ne peut pas être éliminée mais, elle aussi, peut souvent être réduite. Si une erreur systématique se produit sur un résultat de mesure à partir d'un effet reconnu d'une grandeur d'influence, effet appelé ci-après *effet systématique*, l'effet peut être quantifié et, s'il est significatif par rapport à l'exactitude requise du mesurage, une **correction** (B.2.23) ou un **facteur de correction** (B.2.24) peut être appliqué pour compenser l'effet. On suppose qu'après correction l'espérance mathématique de l'erreur qui provient d'un effet systématique est égale à zéro.

NOTE L'incertitude d'une correction appliquée à un résultat de mesure pour compenser un effet systématique *n'est pas* l'erreur systématique due à cet effet, souvent appelée biais, sur le résultat de mesure, bien qu'elle soit parfois désignée ainsi. Au lieu de cela, c'est la mesure de l'*incertitude* du résultat due à une connaissance incomplète de la valeur exigée pour la correction. L'erreur provenant d'une compensation imparfaite d'un effet systématique ne peut pas être connue exactement. Les termes «erreur» et «incertitude» doivent être utilisés correctement et il faut prendre soin de les distinguer l'un de l'autre.

3.2.4 On suppose que le résultat d'un mesurage a été corrigé pour tous les effets systématiques reconnus comme significatifs et qu'on a fait tous ses efforts pour leur identification.

EXEMPLE On applique une correction due à l'impédance finie d'un voltmètre utilisé pour déterminer la différence de potentiel (le mesurande) aux bornes d'une résistance d'impédance élevée, pour réduire l'effet systématique sur le résultat du mesurage provenant de l'effet dû au branchement du voltmètre. Cependant, les valeurs des impédances du voltmètre et de la résistance, qui sont utilisées pour estimer la valeur de la correction et qui sont obtenues à partir d'autres mesurages, présentent elles-mêmes une incertitude. Ces incertitudes sont utilisées pour évaluer la composante de l'incertitude sur la détermination de la différence de potentiel provenant de la correction, donc de l'effet systématique dû à l'impédance finie du voltmètre.

NOTE 1 Les instruments et systèmes de mesure sont souvent ajustés ou étalonnés par utilisation d'étalons et de matériaux de référence pour éliminer les effets systématiques. Il n'en reste pas moins que les incertitudes associées à ces étalons et matériaux de référence doivent être prises en considération.

NOTE 2 Le cas où une correction due à un effet systématique reconnu comme significatif n'est pas appliquée est présenté dans la *Note* de 6.3.1 et en F.2.4.5.

3.3 Incertitude

3.3.1 L'incertitude du résultat d'un mesurage reflète l'impossibilité de connaître exactement la valeur du mesurande (voir [2.2](#)). Le résultat d'un mesurage après correction des effets systématiques reconnus reste encore seulement une *estimation* de la valeur du mesurande en raison de l'incertitude provenant des effets aléatoires et de la correction imparfaite du résultat pour les effets systématiques.

NOTE Le résultat d'un mesurage (après correction) peut, sans qu'on le sache, être très proche de la valeur du mesurande (et, en conséquence, avoir une erreur négligeable) même s'il possède une incertitude élevée. C'est pourquoi l'incertitude du résultat d'un mesurage ne doit pas être confondue avec l'erreur résiduelle inconnue.

3.3.2 Il existe dans la pratique de nombreuses sources possibles d'incertitude dans un mesurage, comprenant:

- a) définition incomplète du mesurande;
- b) réalisation imparfaite de la définition du mesurande;
- c) échantillonnage non représentatif — l'échantillon mesuré peut ne pas représenter le mesurande défini;
- d) connaissance insuffisante des effets des conditions d'environnement sur le mesurage ou mesurage imparfait des conditions d'environnement;
- e) biais dû à l'observateur pour la lecture des instruments analogiques;
- f) résolution finie de l'instrument ou seuil de mobilité;
- g) valeurs inexactes des étalons et matériaux de référence;
- h) valeurs inexactes des constantes et autres paramètres obtenus de sources extérieures et utilisés dans l'algorithme de traitement des données;
- i) approximations et hypothèses introduites dans la méthode et dans la procédure de mesure;
- j) variations entre les observations répétées du mesurande dans des conditions apparemment identiques.

Ces sources ne sont pas nécessairement indépendantes, et certaines des sources [a\)](#) à [j\)](#) peuvent contribuer à la source [j\)](#). Naturellement, un effet systématique non mis en évidence ne peut pas être pris en compte dans l'évaluation de l'incertitude du résultat d'un mesurage mais il contribue à son erreur.

3.3.3 La Recommandation INC-1 (1980) du Groupe de travail sur l'expression des incertitudes classe les composantes de l'incertitude en deux catégories fondées sur leur méthode d'évaluation, «A» et «B» (voir [0.7](#), [2.3.2](#) et [2.3.3](#)). Ces catégories s'appliquent à l'*incertitude* et ne constituent pas des substituts aux mots «aléatoire» et «systématique». L'incertitude d'une correction pour un effet systématique connu peut être obtenue dans certains cas par une évaluation de Type A et, dans d'autres cas, par une évaluation de Type B; il peut en être de même pour l'incertitude qui caractérise un effet aléatoire.

NOTE Dans certaines publications, les composantes de l'incertitude sont réparties en «aléatoires» et «systématiques» et sont respectivement associées aux erreurs provenant d'effets aléatoires et d'effets systématiques connus. Un tel classement des composantes de l'incertitude peut être ambigu lorsqu'on l'applique généralement. Par exemple, une composante «aléatoire» de l'incertitude pour un mesurage donné peut devenir une composante «systématique» de l'incertitude dans un autre mesurage pour lequel on utilise le résultat du premier mesurage comme donnée d'entrée. Différencier les *méthodes* d'évaluation des composantes de l'incertitude plutôt que les *composantes* elles-mêmes évite cette ambiguïté. En même temps, cela n'empêche pas de rassembler ultérieurement des composantes individuelles évaluées par les deux méthodes différentes dans des groupes conçus pour être utilisés pour un objectif particulier (voir [3.4.3](#)).

3.3.4 L'objectif de la classification en Type A et en Type B est d'indiquer les deux différentes manières d'évaluer les composantes de l'incertitude; elle n'a pour but que de clarifier la présentation; cette classification ne signifie pas qu'il existe une différence quelconque de nature entre les composantes résultant des deux types d'évaluation. Les deux types d'évaluation sont fondés sur des **lois de probabilité** ([C.2.3](#)), et les

composantes de l'incertitude résultant de l'un comme de l'autre type sont quantifiées par des variances ou des écarts-types.

3.3.5 La variance estimée u^2 qui caractérise une composante de l'incertitude obtenue par une évaluation de Type A est calculée à partir de séries d'observations répétées et est la variance habituelle estimée statistiquement s^2 (voir 4.2). L'**écart-type** estimé (C.2.12, C.2.21, C.3.3) u , racine carrée de u^2 , est donc $u = s$ et, par commodité, est parfois appelé *incertitude-type de Type A*. Pour une composante de l'incertitude obtenue par une évaluation de Type B, la variance estimée u^2 est évaluée par utilisation des connaissances disponibles (voir 4.3) et l'écart-type estimé u est parfois appelé *incertitude-type de Type B*.

On obtient donc une incertitude-type de Type A à partir d'une **fonction de densité de probabilité** (C.2.5) (ou simplement **densité de probabilité**) déduite d'une **distribution d'effectif** (C.2.18) (ou distribution de fréquence) observée alors qu'on obtient une incertitude-type de Type B à partir d'une densité de probabilité supposée, fondée sur le degré de croyance en ce qu'un événement se produise [souvent appelé **probabilité** (C.2.1) subjective]. Les deux approches utilisent des interprétations classiques de la probabilité.

NOTE Une évaluation de Type B d'une composante de l'incertitude est habituellement fondée sur un ensemble d'informations relativement fiables (voir 4.3.1).

3.3.6 Lorsque le résultat d'un mesurage est obtenu à partir des valeurs de plusieurs autres grandeurs, l'incertitude-type de ce résultat est appelée *incertitude-type composée* et notée u_c . C'est l'écart-type estimé associé au résultat et il est égal à la racine carrée de la variance composée obtenue à partir de toutes les composantes de variances et **covariances** (C.3.4), de quelque manière qu'elles soient évaluées, en utilisant ce qui, dans ce *Guide*, est appelé la *loi de propagation de l'incertitude* (voir Article 5).

3.3.7 Pour satisfaire les besoins de certaines applications industrielles et commerciales ainsi que les exigences dans les domaines de la santé et de la sécurité, une *incertitude élargie* U s'obtient par la multiplication de l'incertitude-type composée u_c par un *facteur d'élargissement* k . L'objectif poursuivi avec cette incertitude élargie U est de fournir, autour du résultat d'un mesurage, un intervalle dont on puisse s'attendre à ce qu'il comprenne une fraction élevée de la distribution des valeurs qui pourraient être attribuées raisonnablement au mesurande. Le choix du facteur k , qui est habituellement compris entre 2 et 3, est fondé sur la probabilité ou le niveau de confiance exigé pour l'intervalle (voir Article 6).

NOTE Le facteur d'élargissement k doit toujours être donné pour que l'incertitude-type de la grandeur mesurée puisse être retrouvée et utilisée dans le calcul de l'incertitude-type composée d'autres résultats de mesure qui pourraient dépendre de cette grandeur.

3.4 Considérations pratiques

3.4.1 Si on fait varier la totalité des grandeurs dont dépend le résultat d'un mesurage, son incertitude peut être évaluée par des moyens statistiques. Cependant, comme cela est rarement possible en pratique faute de temps et de ressources suffisantes, l'incertitude d'un résultat de mesure est habituellement évaluée par utilisation d'un modèle mathématique du mesurage et de la loi de propagation de l'incertitude. L'hypothèse qu'un mesurage peut être modélisé mathématiquement, jusqu'au degré imposé par l'exactitude requise pour le mesurage, est donc implicite dans ce *Guide*.

3.4.2 Comme le modèle mathématique peut être incomplet, il faudrait pouvoir faire varier toutes les grandeurs mises en jeu, de la manière la plus complète possible pratiquement, pour que l'évaluation de l'incertitude puisse être fondée le plus possible sur des données observées. À chaque fois que cela est réalisable, on utilisera des modèles empiriques du mesurage fondés sur des données quantitatives obtenues pendant de longues périodes ou sur l'utilisation d'étalons de surveillance ou de cartes de contrôles qui puissent indiquer si un mesurage est sous contrôle statistique. Toutes ces dispositions doivent faire partie des efforts qui ont pour but d'obtenir des évaluations fiables de l'incertitude. Le modèle mathématique doit toujours être révisé lorsque les données observées, y compris le résultat de déterminations indépendantes du même mesurande, démontrent que le modèle est incomplet. Un essai bien conçu peut grandement faciliter des évaluations fiables de l'incertitude et c'est une part importante de l'art de la mesure.

3.4.3 Pour décider si un système de mesure fonctionne correctement, la variabilité observée expérimentalement de ses valeurs de sortie, telle que mesurée par leur écart-type observé, est souvent comparée avec l'écart-type prédit, obtenu par combinaison des diverses composantes de l'incertitude qui

caractérisent le mesurage. Dans ces cas-là, on considérera seulement les composantes (qu'elles soient obtenues par des évaluations de Type A ou de Type B) qui pourraient contribuer à la variabilité, observée expérimentalement, de ces valeurs de sortie.

NOTE Une telle analyse peut être facilitée en rassemblant en deux groupes séparés et correctement identifiés les composantes qui contribuent à la variabilité et celles qui n'y contribuent pas.

3.4.4 Dans certains cas, il n'est pas nécessaire d'inclure l'incertitude d'une correction pour un effet systématique dans l'évaluation de l'incertitude d'un résultat de mesure. Bien que l'incertitude ait été évaluée, elle peut être ignorée si sa contribution à l'incertitude-type composée du résultat de mesure est insignifiante. Si la valeur de la correction elle-même est insignifiante par rapport à l'incertitude-type composée, elle peut, elle aussi, être ignorée.

3.4.5 Il arrive souvent en pratique, spécialement dans le domaine de la métrologie légale, qu'un dispositif soit essayé par comparaison avec un étalon et que les incertitudes associées à l'étalon et à la procédure de comparaison soient négligeables par rapport à l'exactitude exigée pour l'essai. C'est le cas, par exemple, de l'utilisation d'un ensemble bien étalonné d'étalons de masses marquées pour déterminer l'exactitude d'une balance commerciale. Dans ces cas-là, on peut envisager le mesurage comme étant la détermination de l'erreur du dispositif en essai, parce que les composantes de l'incertitude sont suffisamment petites pour pouvoir être ignorées. (Voir aussi [F.2.4.2.](#))

3.4.6 L'estimation de la valeur d'un mesurande fournie par le résultat d'un mesurage s'exprime parfois en fonction de la valeur adoptée pour un étalon plutôt qu'en fonction de l'unité correspondante du Système international d'unités (SI). Dans ces cas-là, l'ordre de grandeur de l'incertitude qu'on peut attribuer au résultat de mesure peut être significativement plus petit que lorsqu'on exprime le résultat avec l'unité SI correspondante. (En fait, cela revient à redéfinir le mesurande comme étant le rapport de la valeur de la grandeur à mesurer à la valeur adoptée pour l'étalon.)

EXEMPLE Un étalon de tension à diode de Zener de haute qualité est étalonné par comparaison à une référence de tension à effet Josephson fondée sur la valeur de la constante de Josephson recommandée par le CIPM pour l'utilisation internationale. L'incertitude-type composée relative $u_c(V_S)/V_S$ (voir [5.1.6](#)) de la différence de potentiel étalonnée V_S de l'étalon Zener est 2×10^{-8} lorsqu'on exprime V_S en fonction de la valeur recommandée, mais $u_c(V_S)/V_S$ est 4×10^{-7} lorsqu'on exprime V_S en fonction de l'unité SI de différence de potentiel, volt (V), en raison de l'incertitude supplémentaire associée à la valeur en unité SI de la constante de Josephson.

3.4.7 Des valeurs aberrantes dans l'enregistrement ou l'analyse des résultats d'observations peuvent introduire une erreur inconnue significative pour le résultat d'un mesurage. Des valeurs aberrantes importantes peuvent habituellement être mises en évidence par un examen approprié des résultats; des valeurs faiblement aberrantes peuvent être masquées ou apparaître, éventuellement, comme des variations aléatoires. Les mesures de l'incertitude ne prétendent pas prendre en compte de telles fautes.

3.4.8 Bien que ce *Guide* fournisse un cadre pour l'estimation de l'incertitude, il ne peut remplacer ni la réflexion critique ni l'honnêteté intellectuelle ni la compétence professionnelle. L'évaluation de l'incertitude n'est jamais une tâche de routine ni une opération purement mathématique; elle dépend de la connaissance détaillée de la nature du mesurande et du mesurage. La qualité et l'utilité de l'incertitude fournie pour le résultat d'un mesurage dépendent, en fin de compte, de la compréhension, de l'analyse critique et de l'intégrité de ceux qui contribuent à son évaluation.

4 Évaluation de l'incertitude-type

On pourra trouver en Annexe [F](#) des conseils complémentaires, principalement de nature pratique, pour l'évaluation des composantes de l'incertitude.

4.1 Modélisation du mesurage

4.1.1 Dans de nombreux cas, un mesurande Y n'est pas mesuré directement mais il est déterminé à partir de N autres grandeurs $X_1, X_2, \dots, X_N$ à travers une relation fonctionnelle f :

$$Y = f(X_1, X_2, \dots, X_N) \quad (1)$$

NOTE 1 Par économie de notation, on utilise dans ce *Guide* le même symbole pour la grandeur physique (le mesurande) et pour la variable aléatoire (voir 4.2.1) qui représente le résultat possible d'une observation de cette grandeur. Lorsqu'on énonce que X_i possède une loi de probabilité particulière, le symbole est utilisé dans son deuxième sens; on suppose que la grandeur physique elle-même peut être caractérisée en première approximation par une valeur unique (voir 1.2 et 3.1.3).

NOTE 2 Dans une série d'observations, la k ème valeur observée de X_i est notée $X_{i,k}$; ainsi, si une résistance est notée R , la k ème valeur observée de la résistance est notée R_k .

NOTE 3 L'estimation de X_i (à proprement parler, de son espérance mathématique) est notée x_i .

EXEMPLE Si l'on applique une différence de potentiel V aux bornes d'une résistance dont la valeur dépend de la température, de résistance R_0 à la température définie t_0 et de coefficient linéaire de température α , la puissance P (le mesurande) dissipée par la résistance à la température t est fonction de V , R_0 , α , et t selon

$$P = f(V, R_0, \alpha, t) = V^2 / \left\{ R_0 [1 + \alpha(t - t_0)] \right\}$$

NOTE D'autres méthodes de mesure de P seraient modélisées par des expressions mathématiques différentes.

4.1.2 Les *grandeurs d'entrée* $X_1, X_2, \dots, X_N$ dont dépend la *grandeur de sortie* Y peuvent elles-mêmes être envisagées comme mesurandes et peuvent elles-mêmes dépendre d'autres grandeurs, y compris les corrections et facteurs de correction pour les effets systématiques, aboutissant de ce fait à une relation fonctionnelle compliquée f qui peut ne jamais être écrite explicitement. De plus, la fonction f peut être déterminée expérimentalement (voir 5.1.4) ou exister seulement sous forme d'algorithme qui doit être évalué numériquement. Telle qu'elle apparaît dans ce *Guide*, la fonction f doit être interprétée dans le contexte le plus large, en particulier comme la fonction qui contient toutes les grandeurs susceptibles de contribuer à une composante significative de l'incertitude du résultat de mesure, y compris toutes les corrections.

En conséquence, si les données indiquent que cette fonction f ne modélise pas le mesurage au degré imposé par l'exactitude exigée pour le résultat de mesure, des grandeurs d'entrée additionnelles doivent être introduites dans f pour éliminer le manque d'adéquation (voir 3.4.2). Cela peut nécessiter l'introduction d'une grandeur d'entrée reflétant la connaissance incomplète d'un phénomène qui affecte le mesurande. Dans l'Exemple de 4.1.1, il peut être nécessaire d'introduire des grandeurs d'entrée additionnelles pour tenir compte d'une distribution de température reconnue comme non uniforme le long de la résistance, d'un coefficient de température non linéaire de la résistance, ou d'un effet possible de la pression atmosphérique.

NOTE Quoi qu'il en soit, l'Équation (1) peut être aussi simple que $Y = X_1 - X_2$. Cette expression modélise, par exemple, la comparaison de deux déterminations de la même grandeur X .

4.1.3 L'ensemble des grandeurs d'entrée $X_1, X_2, \dots, X_N$ peut être caractérisé par:

- les grandeurs dont les valeurs *et les incertitudes* sont directement déterminées au cours du mesurage. Ces valeurs et incertitudes peuvent être obtenues, par exemple, à partir d'une observation unique, ou à partir d'observations répétées, ou par un jugement fondé sur l'expérience. Elles peuvent impliquer la détermination de corrections pour les lectures d'instruments et de corrections dues aux grandeurs d'influence telles que la température ambiante, la pression atmosphérique ou l'humidité;
- les grandeurs dont les valeurs *et les incertitudes* sont introduites dans le mesurage à partir de sources extérieures, telles que les grandeurs associées à des étalons, à des matériaux de référence certifiés et à des valeurs de référence provenant de la littérature.

4.1.4 Une estimation du mesurande Y , notée y , est obtenue à partir de l'Équation (1) en utilisant les estimations d'entrée $x_1, x_2, \dots, x_N$ pour les valeurs des N grandeurs $X_1, X_2, \dots, X_N$. Ainsi, l'estimation de sortie y , qui est le résultat du mesurage, est donnée par

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_N) \quad (2)$$

NOTE Dans certains cas, l'estimation y peut être obtenue à partir de

$$y = \bar{Y} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n Y_k = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(X_{1,k}, X_{2,k}, \dots, X_{N,k})$$

C'est-à-dire que y est pris comme étant la moyenne arithmétique (voir 4.2.1) de n déterminations indépendantes Y_k de Y , chaque détermination ayant la même incertitude et chacune étant fondée sur un ensemble complet de valeurs observées de N grandeurs d'entrée X_i obtenues en même temps. Plutôt que de faire $y = f(\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_N)$, où

$$\bar{X}_i = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_{i,k}$$

est la moyenne arithmétique des observations individuelles $X_{i,k}$, cette manière de calculer la moyenne peut être préférable lorsque f est une fonction non linéaire des grandeurs d'entrée $X_1, X_2, \dots, X_N$ mais les deux approches sont identiques si f est une fonction linéaire des X_i (voir H.2 et H.4).

4.1.5 L'écart-type estimé associé à l'estimation de sortie ou au résultat de mesure y , appelé *incertitude-type composée* et noté $u_c(y)$, est déterminé à partir de l'écart-type estimé associé à chaque estimation d'entrée x_i , appelée *incertitude-type* et notée $u(x_i)$ (voir 3.3.5 et 3.3.6).

4.1.6 Chaque estimation d'entrée x_i et son incertitude-type associée $u(x_i)$ sont obtenues à partir d'une loi des valeurs possibles de la grandeur d'entrée X_i . Cette loi de probabilité peut être fondée sur une distribution de fréquence, c'est-à-dire sur une série d'observations $X_{i,k}$ des X_i , ou ce peut être une loi *a priori*. Les évaluations de Type A de composantes de l'incertitude-type sont fondées sur des distributions de fréquence alors que les évaluations de Type B sont fondées sur des lois *a priori*. On doit reconnaître que, dans les deux cas, les lois sont des modèles utilisés pour représenter l'état de notre connaissance.

4.2 Évaluation de Type A de l'incertitude-type

4.2.1 Dans la plupart des cas, la meilleure estimation disponible de l'espérance mathématique μ_q d'une grandeur q qui varie au hasard [c'est-à-dire d'une **variable aléatoire** (C.2.2)] et pour laquelle on a obtenu n observations indépendantes q_k dans les mêmes conditions de mesure (voir B.2.15), est la **moyenne arithmétique** (C.2.19) des n observations:

$$\bar{q} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n q_k \quad (3)$$

Ainsi, pour une grandeur d'entrée X_i estimée à partir de n observations répétées indépendantes $X_{i,k}$, la moyenne arithmétique $\bar{X}_i$ obtenue par l'Équation (3) est utilisée comme estimation d'entrée x_i dans l'Équation (2) pour déterminer le résultat de mesure y ; on prend donc $x_i = \bar{X}_i$. Les estimations d'entrée non évaluées par des observations répétées doivent être obtenues par d'autres méthodes, telles que celles de la seconde catégorie de 4.1.3.

4.2.2 Les valeurs des observations individuelles q_k diffèrent en raison des variations aléatoires des grandeurs d'influence ou des effets aléatoires (voir 3.2.2). La variance expérimentale des observations, qui estime la variance σ^2 de la loi de probabilité de q , est donnée par

$$s^2(q_k) = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (q_j - \bar{q})^2 \quad (4)$$

Cette estimation de la variance et sa racine carrée $s(q_k)$, appelée **écart-type expérimental** (B.2.17), caractérisent la variabilité des valeurs observées q_k , ou, plus spécifiquement, leur dispersion autour de leur moyenne $\bar{q}$.

4.2.3 La meilleure estimation de $\sigma^2(\bar{q}) = \sigma^2/n$, variance de la moyenne, est donnée par

$$s^2(\bar{q}) = \frac{s^2(q_k)}{n} \quad (5)$$

La variance expérimentale de la moyenne $s^2(\bar{q})$ et l'**écart-type expérimental de la moyenne** $s(\bar{q})$ (B.2.17, Note 2), égal à la racine carrée de $s^2(\bar{q})$, quantifient la manière dont $\bar{q}$ estime au mieux l'espérance mathématique μ_q de q et l'une ou l'autre peuvent être utilisés comme mesure de l'incertitude de $\bar{q}$.

Alors, pour une grandeur d'entrée X_i déterminée à partir de n observations répétées indépendantes $X_{i,k}$, l'incertitude-type $u(x_i)$ de son estimation $x_i = \bar{X}_i$ est $u(x_i) = s(\bar{X}_i)$, avec $s^2(\bar{X}_i)$ calculé selon l'Équation (5). Par commodité, $u^2(x_i) = s^2(\bar{X}_i)$ et $u(x_i) = s(\bar{X}_i)$ sont parfois appelés respectivement *variance de Type A* et *incertitude-type de Type A*.

NOTE 1 Le nombre d'observations n doit être suffisamment grand pour garantir que $\bar{q}$ fournisse une estimation fiable de l'espérance mathématique μ_q de la variable aléatoire q , et pour que $s^2(\bar{q})$ fournisse une estimation fiable de la variance $\sigma^2(\bar{q}) = \sigma^2/n$ (voir Note de 4.3.2). La différence entre $s^2(\bar{q})$ et $\sigma^2(\bar{q})$ doit être prise en considération lorsqu'on bâtit des intervalles de confiance (voir 6.2.2). Dans ce cas, si la loi de probabilité de q est une loi normale (voir 4.3.4), la différence est prise en compte à travers la loi de t (voir G.3.2).

NOTE 2 Bien que la variance $s^2(\bar{q})$ soit une grandeur plus fondamentale, l'écart-type $s(\bar{q})$ est en pratique plus commode car il a la même dimension que q et une valeur plus parlante que celle de la variance.

4.2.4 Pour un mesurage bien caractérisé et sous contrôle statistique, on peut avoir à sa disposition une estimation de la variance composée ou provenant d'un ensemble accumulé de résultats, s_p^2 (ou l'écart-type expérimental correspondant s_p). Dans un tel cas, lorsqu'on détermine la valeur d'un mesurande q à partir de n observations indépendantes, la variance expérimentale de la moyenne arithmétique $\bar{q}$ des observations est mieux estimée par s_p^2/n que par $s^2(q_k)/n$ et l'incertitude-type de la moyenne est $u = s_p/\sqrt{n}$. (Voir aussi la Note de H.3.6.)

4.2.5 On obtient souvent une estimation x_i d'une grandeur d'entrée X_i à partir d'une courbe ajustée sur des résultats expérimentaux par la méthode des moindres carrés. La variance estimée et l'incertitude-type résultante des paramètres d'ajustement caractéristiques de la courbe et de tout point prédit peuvent habituellement être calculées par des procédures statistiques bien connues (voir H.3 et Référence [8]).

4.2.6 Le nombre de **degrés de liberté** (C.2.31) ν_i de $u(x_i)$ (voir G.3), égal à $n - 1$ dans le cas simple où $x_i = \bar{X}_i$ et $u(x_i) = s(\bar{X}_i)$ sont calculés à partir de n observations indépendantes comme en 4.2.1 et 4.2.3, doit toujours être donné lorsque les évaluations de Type A des composantes d'incertitude sont fournies.

4.2.7 S'il existe une corrélation entre les variations aléatoires des observations d'une grandeur d'entrée, par exemple en fonction du temps, la moyenne et l'écart-type expérimental de la moyenne donnés en 4.2.1 et 4.2.3 peuvent être des **estimateurs** (C.2.25) impropres des **statistiques** (C.2.23) recherchées. Dans de tels cas, les observations doivent être analysées par des méthodes statistiques spécialement conçues pour traiter une série de mesurages aléatoires corrélés.

NOTE On utilise de telles méthodes spéciales pour traiter les mesurages d'étalons de fréquence. Il est cependant possible, pour d'autres grandeurs métrologiques, lorsqu'on passe de mesurages à court terme à des mesurages à long terme, que l'hypothèse de variations aléatoires non corrélées ne soit plus valable et qu'on puisse aussi utiliser ces méthodes spéciales pour traiter ces mesurages. (Voir Référence [9], par exemple, pour une présentation détaillée de la variance d'Allan.)

4.2.8 La présentation de l'évaluation de Type A de l'incertitude-type donnée de 4.2.1 à 4.2.7 ne prétend pas être exhaustive; il existe de nombreuses situations, certaines relativement complexes, qui peuvent être traitées par les méthodes statistiques. Un exemple important concerne l'utilisation de modèles d'étalonnage, souvent fondés sur la méthode des moindres carrés, pour évaluer les incertitudes provenant de variations aléatoires, à la fois à court et à long terme, des résultats de comparaisons d'objets matériels de valeur inconnue, tels que des cales étalons ou des masses marquées, avec des étalons de référence de valeur

connue. Dans de telles situations de mesures relativement simples, les composantes de l'incertitude peuvent fréquemment être évaluées par l'analyse statistique de données obtenues en utilisant des plans d'expérience consistant en des séquences emboîtées de mesurages du mesurande pour un certain nombre de valeurs différentes des grandeurs dont il dépend — cette technique est appelée analyse de variance (voir [H.5](#)).

NOTE À des niveaux inférieurs de la chaîne d'étalonnage, pour lesquels on suppose souvent que les étalons de référence sont exactement connus parce qu'ils ont été étalonnés par un laboratoire d'étalonnage national ou primaire, l'incertitude d'un résultat d'étalonnage peut être une simple incertitude-type de Type A évaluée à partir de l'écart-type expérimental, cet écart-type qui caractérise le mesurage étant évalué à partir d'un ensemble cumulé de résultats.

4.3 Évaluation de Type B de l'incertitude-type

4.3.1 Pour une estimation x_i d'une grandeur d'entrée X_i qui n'a pas été obtenue à partir d'observations répétées, la variance estimée associée $u^2(x_i)$ ou l'incertitude-type $u(x_i)$ est évaluée par un jugement scientifique fondé sur toutes les informations disponibles au sujet de la variabilité possible de X_i . L'ensemble d'informations accumulées peut comprendre:

- des résultats de mesures antérieures;
- l'expérience ou la connaissance générale du comportement et des propriétés des matériaux et instruments utilisés;
- les spécifications du fabricant;
- les données fournies par des certificats d'étalonnage ou autres certificats;
- l'incertitude assignée à des valeurs de référence provenant d'ouvrages et manuels.

Par commodité, $u^2(x_i)$ et $u(x_i)$ évalués de cette façon sont parfois appelés respectivement *variance de Type B* et *incertitude-type de Type B*.

NOTE Lorsque x_i est obtenu à partir d'une loi *a priori*, la variance associée devrait être écrite correctement $u^2(X_i)$, mais, par souci de simplification, $u^2(x_i)$ et $u(x_i)$ sont utilisés tout au long de ce Guide.

4.3.2 L'utilisation correcte de l'ensemble des informations disponibles pour une évaluation de Type B de l'incertitude-type fait appel à la perspicacité fondée sur l'expérience et les connaissances générales, et c'est une compétence qui peut s'apprendre par la pratique. On doit avoir en mémoire qu'une évaluation de Type B d'incertitude-type peut être aussi fiable qu'une évaluation de Type A, notamment dans une situation de mesure où une évaluation de Type A est fondée sur un nombre relativement faible d'observations statistiquement indépendantes.

NOTE Si la loi de probabilité de q en Note 1 de [4.2.3](#) est normale, alors $\sigma[s(\bar{q})]/\sigma(\bar{q})$, écart-type relatif de $s(\bar{q})$ par rapport à $\sigma(\bar{q})$, est approximativement égal à $[2(n-1)]^{-1/2}$. En prenant alors $\sigma[s(\bar{q})]$ comme l'incertitude de $s(\bar{q})$, l'incertitude relative sur $s(\bar{q})$ est de 24 pour-cent pour $n = 10$ (soit 10 observations) et est de 10 pour-cent pour $n = 50$. (Des valeurs supplémentaires sont données dans le Tableau [E.1](#) de l'Annexe [E](#).)

4.3.3 Si l'on obtient l'estimation x_i à partir d'une spécification de fabricant, d'un certificat d'étalonnage, d'une publication ou d'une autre source et que son incertitude indiquée est donnée comme étant un multiple déterminé d'un écart-type, l'incertitude-type $u(x_i)$ est simplement égale au quotient de la valeur indiquée par le facteur multiplicatif et la variance estimée $u^2(x_i)$ est égale au carré de ce quotient.

EXEMPLE Un certificat d'étalonnage indique que la masse m_S d'un étalon de masse en acier inoxydable de valeur nominale égale à un kilogramme est de 1 000,000 325 g et que «l'incertitude sur cette valeur est égale à 240 µg au niveau de 3 écarts-types». L'incertitude-type de l'étalon de masse est alors simplement $u(m_S) = (240 \text{ µg})/3 = 80 \text{ µg}$. Cela correspond à une incertitude-type relative $u(m_S)/m_S$ égale à 80×10^{-9} (voir [5.1.6](#)). La variance estimée est $u^2(m_S) = (80 \text{ µg})^2 = 6,4 \times 10^{-9} \text{ g}^2$.

NOTE Dans de nombreux cas, on ne dispose d'aucune ou de presque aucune information sur les composantes individuelles qui ont permis d'obtenir l'incertitude indiquée. C'est généralement sans importance pour l'expression de l'incertitude selon les pratiques de ce Guide puisque toutes les incertitudes-types sont traitées de la même façon lorsqu'on calcule l'incertitude-type composée d'un résultat de mesure (voir Article [5](#)).

4.3.4 L'incertitude fournie pour x_i n'est pas nécessairement donnée comme un multiple d'un écart-type comme en 4.3.3. L'incertitude fournie peut définir un intervalle correspondant à un niveau de confiance de 90, 95 ou 99 pour-cent (voir 6.2.2). Sauf indication contraire, on peut supposer qu'une **loi normale** (C.2.14) a été utilisée pour calculer l'incertitude fournie et retrouver l'incertitude-type de x_i en divisant la valeur de l'incertitude fournie par le facteur approprié pour la loi normale. Les facteurs correspondant aux trois niveaux de confiance ci-dessus sont 1,64; 1,96 et 2,58 (voir aussi Tableau G.1 dans l'Annexe G).

NOTE Une telle hypothèse n'est pas nécessaire si l'incertitude a été donnée en suivant les recommandations de ce *Guide* concernant l'expression de l'incertitude, ces recommandations soulignant que le facteur d'élargissement utilisé doit toujours être donné (voir 7.2.3).

EXEMPLE Un certificat d'étalonnage indique que la valeur R_S d'une résistance étalon de valeur nominale égale à dix ohms est de $10\,000\,742\,\Omega \pm 129\,\mu\Omega$ à $23\,^\circ\text{C}$ et que «l'incertitude indiquée de $129\,\mu\Omega$ définit un intervalle au niveau de confiance de 99 pour-cent». L'incertitude-type sur la valeur de la résistance peut être prise égale à $u(R_S) = (129\,\mu\Omega)/2,58 = 50\,\mu\Omega$, qui correspond à une incertitude-type relative $u(R_S)/R_S$ de $5,0 \times 10^{-6}$ (voir 5.1.6). La variance estimée est $u^2(R_S) = (50\,\mu\Omega)^2 = 2,5 \times 10^{-9}\,\Omega^2$.

4.3.5 Considérons le cas où, sur la base des informations disponibles, on peut énoncer qu'«il y a une chance sur deux pour que la valeur de la grandeur d'entrée X_i soit située dans l'intervalle compris entre a_- et a_+ » (en d'autres termes, la probabilité pour que X_i soit situé dans cet intervalle est égale à 0,5, ou 50 pour-cent). Si l'on peut supposer que les valeurs possibles de X_i sont distribuées approximativement selon une loi normale, alors la meilleure estimation x_i de X_i peut être prise au milieu de l'intervalle. De plus, si la demi-largeur de l'intervalle est notée $a = (a_+ - a_-)/2$, on peut prendre $u(x_i) = 1,48a$, parce que, pour une loi normale d'espérance mathématique μ et d'écart-type σ , l'intervalle $\mu \pm \sigma/1,48$ recouvre approximativement 50 pour-cent de la loi.

EXEMPLE Un mécanicien qui détermine les dimensions d'une pièce estime que sa longueur se situe, avec une probabilité de 0,5, dans l'intervalle compris entre 10,07 mm et 10,15 mm et donne $l = (10,11 \pm 0,04)$ mm; cela signifie que $\pm 0,04$ mm définit un intervalle ayant un niveau de confiance de 50 pour-cent. a est alors égal à 0,04 mm; en supposant une loi normale pour les valeurs possibles de l , l'incertitude-type sur la longueur est $u(l) = 1,48 \times 0,04\,\text{mm} \approx 0,06\,\text{mm}$, et la variance estimée est $u^2(l) = (1,48 \times 0,04\,\text{mm})^2 = 3,5 \times 10^{-3}\,\text{mm}^2$.

4.3.6 Considérons un cas analogue à celui de 4.3.5 mais où, sur la base des informations disponibles, on peut énoncer qu'«il y a environ deux chances sur trois pour que la valeur X_i soit située dans l'intervalle compris entre a_- et a_+ » (en d'autres termes, la probabilité pour que X_i soit situé dans cet intervalle est de l'ordre de 0,67). On peut alors prendre raisonnablement $u(x_i) = a$, parce que, pour une loi normale d'espérance mathématique μ et d'écart-type σ , l'intervalle $\mu \pm \sigma$ recouvre environ 68,3 pour-cent de la loi.

NOTE Si l'on utilisait le fractile normal 0,967 42 correspondant à la probabilité $p = 2/3$, c'est-à-dire si l'on écrivait $u(x_i) = a/0,967\,42 = 1,033a$, on donnerait à la valeur de $u(x_i)$ une signification bien plus précise que ce qui est manifestement justifié.

4.3.7 Dans d'autres cas, on peut seulement estimer des limites (inférieure et supérieure) pour X_i , en particulier pour énoncer que «la probabilité pour que la valeur de X_i soit située dans l'intervalle compris entre a_- et a_+ pour toutes les applications pratiques est égale à 1 et est essentiellement égale à zéro en dehors de cet intervalle». Si l'on ne possède *aucune connaissance spécifique* sur les valeurs possibles de X_i à l'intérieur de l'intervalle, on peut seulement supposer que X_i se situe d'une manière également probable en tout point de l'intervalle [distribution uniforme ou rectangulaire des valeurs possibles — voir 4.4.5 et Figure 2 a)]. Alors x_i , espérance mathématique de X_i , est le milieu de l'intervalle $x_i = (a_- + a_+)/2$, avec la variance associée

$$u^2(x_i) = (a_+ - a_-)^2 / 12 \quad (6)$$

Si l'on note $2a$ la différence entre les deux limites, $a_+ - a_-$, l'Équation (6) devient alors

$$u^2(x_i) = a^2 / 3 \quad (7)$$

NOTE Lorsqu'une composante d'incertitude déterminée de cette manière contribue significativement à l'incertitude d'un résultat de mesure, il est prudent d'obtenir des données complémentaires pour son évaluation ultérieure.

EXEMPLE 1 Un manuel donne la valeur du coefficient de dilatation linéique du cuivre pur à 20 °C, $\alpha_{20}(\text{Cu})$ comme étant égal à $16,52 \times 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ et énonce simplement que «l'erreur sur cette valeur ne devrait pas dépasser $0,40 \times 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ ». Sur la base de cette information limitée, il n'est pas déraisonnable de supposer que la valeur de $\alpha_{20}(\text{Cu})$ est située avec une probabilité égale dans l'intervalle compris entre $16,12 \times 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ et $16,92 \times 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$, et qu'il est très peu vraisemblable que $\alpha_{20}(\text{Cu})$ soit situé en dehors de cet intervalle. La variance de cette loi rectangulaire symétrique des valeurs possibles de $\alpha_{20}(\text{Cu})$ de demi-largeur $a = 0,40 \times 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ est alors, à partir de l'Équation (7), $u^2(\alpha_{20}) = (0,40 \times 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1})^2/3 = 53,3 \times 10^{-15} \text{ }^\circ\text{C}^{-2}$, et l'incertitude-type est $u(\alpha_{20}) = (0,40 \times 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}) / \sqrt{3} = 0,23 \times 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$.

EXEMPLE 2 Les spécifications d'un fabricant pour un voltmètre numérique indiquent qu'«entre un et deux ans après l'étalonnage de l'instrument, son exactitude sur le calibre 1 V est égale à 14×10^{-6} fois la lecture plus 2×10^{-6} fois le calibre». Supposons que l'instrument soit utilisé 20 mois après étalonnage pour mesurer une différence de potentiel V sur son calibre 1 V et que l'on trouve la moyenne arithmétique d'un nombre d'observations répétées indépendantes être égale à $u(\bar{V}) = 0,928\,571 \text{ V}$ avec une incertitude-type de Type A égale à $u(\bar{V}) = 12 \text{ } \mu\text{V}$. L'évaluation de Type B de l'incertitude-type se déduit des spécifications du fabricant si l'on suppose que l'exactitude indiquée fournit les limites symétriques d'une correction additive à $\bar{V}$, $\Delta\bar{V}$, d'espérance mathématique égale à zéro et pouvant se situer avec une probabilité égale à n'importe quel endroit entre ces limites. La demi-largeur a de la loi rectangulaire symétrique des valeurs possibles de $\Delta\bar{V}$, est alors $a = (14 \times 10^{-6}) \times (0,928\,571 \text{ V}) + (2 \times 10^{-6}) \times (1 \text{ V}) = 15 \text{ } \mu\text{V}$ et, à partir de l'Équation (7), $u^2(\Delta\bar{V}) = 75 \text{ } \mu\text{V}^2$ et $u(\Delta\bar{V}) = 8,7 \text{ } \mu\text{V}$. L'estimation de la valeur du mesurande V , notée par simplification avec le même symbole V , est donnée par $V = \bar{V} + \Delta\bar{V} = 0,928\,571 \text{ V}$. On peut obtenir l'incertitude-type composée de cette estimation par la composition de l'incertitude-type de Type A de V égale à $12 \text{ } \mu\text{V}$, avec l'incertitude-type de Type B de $\Delta\bar{V}$, égale à $8,7 \text{ } \mu\text{V}$. La méthode générale de composition des composantes de l'incertitude-type est donnée à l'Article 5, avec cet exemple particulier traité en 5.1.5.

4.3.8 En 4.3.7, les limites supérieure et inférieure a_+ et a_- pour la grandeur d'entrée X_i peuvent ne pas être symétriques par rapport à sa meilleure estimation x_i ; plus spécifiquement, si la limite inférieure est écrite $a_- = x_i - b_-$ et la limite supérieure $a_+ = x_i + b_+$, alors $b_- \neq b_+$. Puisque, dans ce cas, x_i (supposé être l'espérance mathématique de X_i) n'est pas au centre de l'intervalle de a_- à a_+ , la loi de probabilité de X_i ne peut pas être uniforme sur tout l'intervalle. On peut cependant ne pas avoir suffisamment d'information disponible pour choisir une loi convenable; différents modèles conduiront à différentes expressions de la variance. En l'absence de cette information, l'approximation la plus simple est

$$u^2(x_i) = \frac{(b_+ + b_-)^2}{12} = \frac{(a_+ - a_-)^2}{12} \quad (8)$$

qui est la variance d'une loi rectangulaire de largeur totale $b_+ + b_-$. (Des lois asymétriques sont aussi développées en F.2.4.4 et G.5.3.)

EXEMPLE Si la littérature donne la valeur du coefficient pour l'Exemple 1 de 4.3.7 comme étant égale à $\alpha_{20}(\text{Cu}) = 16,52 \times 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ et s'il est fait état que «la plus petite valeur possible est $16,40 \times 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ et la plus grande valeur possible est $16,92 \times 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ », alors $b_- = 0,12 \times 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$, $b_+ = 0,40 \times 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ et, de l'Équation (8), on obtient $u(\alpha_{20}) = 0,15 \times 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$.

NOTE 1 Dans de nombreuses situations pratiques de mesure où les limites sont asymétriques, il peut être approprié d'appliquer une correction de valeur $(b_+ - b_-)/2$ à l'estimation x_i , de sorte que la nouvelle estimation x'_i de X_i se situe au milieu des limites: $x'_i = (a_- + a_+)/2$. Cela ramène la situation au cas de 4.3.7, avec de nouvelles valeurs $b'_+ = b'_- = (b_+ + b_-)/2 = (a_+ - a_-)/2 = a$.

NOTE 2 Sur la base du principe du maximum d'entropie, la densité de probabilité pour le cas asymétrique peut être prise égale à $p(X_i) = A \exp[-\lambda(X_i - x_i)]$, avec $A = [b_- \exp(\lambda b_-) + b_+ \exp(-\lambda b_+)]^{-1}$ et $\lambda = \{\exp[\lambda(b_- + b_+)] - 1\} / \{b_- \exp[\lambda(b_- + b_+)] + b_+\}$. Cela conduit à la variance $u^2(x_i) = b_+ b_- - (b_+ - b_-)/\lambda$; pour $b_+ > b_-$, $\lambda > 0$ et pour $b_+ < b_-$, $\lambda < 0$.

4.3.9 En 4.3.7, parce qu'il n'y avait pas de connaissance spécifique sur les valeurs possibles de X_i à l'intérieur de ses limites estimées a_- à a_+ , on aurait pu seulement supposer que X_i avait la même probabilité de prendre n'importe quelle valeur à l'intérieur de ces limites et une probabilité nulle en dehors. De telles discontinuités sous forme de fonction échelon pour une loi de probabilité se rencontrent rarement en physique. Dans de nombreux cas, il est plus réaliste de s'attendre à ce que les valeurs autour des limites soient sensiblement inférieures à celles situées vers le milieu. Il est alors raisonnable de remplacer la loi rectangulaire symétrique par une loi trapézoïdale symétrique de pentes égales (un trapèze isocèle), avec la base de largeur $a_+ - a_- = 2a$, et le sommet de largeur $2a\beta$, avec $0 \leq \beta \leq 1$. Lorsque $\beta \rightarrow 1$ cette loi

trapézoïdale tend vers la loi rectangulaire de 4.3.7, alors que pour $\beta = 0$ c'est une loi triangulaire [voir 4.4.6 et Figure 2 b)]. En supposant une telle loi trapézoïdale pour X_i , on trouve que l'espérance mathématique de X_i est $x_i = (a_- + a_+)/2$ et sa variance est

$$u^2(x_i) = a^2(1 + \beta^2)/6 \quad (9a)$$

qui devient, pour la loi triangulaire $\beta = 0$,

$$u^2(x_i) = a^2/6 \quad (9b)$$

NOTE 1 Pour une loi normale d'espérance mathématique μ et d'écart-type σ , l'intervalle $\mu \pm 3\sigma$ recouvre approximativement 99,73 pour-cent des valeurs possibles de la loi. Si les limites supérieure et inférieure a_+ et a_- définissent alors des limites à 99,73 pour-cent plutôt qu'à 100 pour-cent et si l'on peut supposer X_i comme étant approximativement distribué normalement plutôt que de ne pas avoir de renseignement spécifique sur X_i entre les limites comme en 4.3.7, alors $u^2(x_i) = a^2/9$. Par comparaison, la variance d'une loi rectangulaire symétrique de demi-largeur a est égale à $a^2/3$ [Équation (7)] et celle d'une loi triangulaire symétrique de demi-largeur a est $a^2/6$ [Équation (9b)]. Il est surprenant de constater que l'ordre de grandeur des variances des trois lois est similaire en regard des grandes différences sur la quantité d'informations qui les justifie.

NOTE 2 La loi trapézoïdale est équivalente à la convolution de deux lois rectangulaires [10], de demi-largeur a_1 égale à la demi-largeur moyenne du trapèze, $a_1 = a(1 + \beta)/2$, l'autre de demi-largeur a_2 égale à la largeur moyenne de l'une des portions triangulaires du trapèze, $a_2 = a(1 - \beta)/2$. La variance de la loi est $u^2 = a_1^2/3 + a_2^2/3$. La loi résultante peut être interprétée comme une loi rectangulaire dont la largeur $2a_1$ possède elle-même une incertitude représentée par une loi rectangulaire de largeur $2a_2$ et modélise le fait que les limites sur une grandeur d'entrée ne sont pas connues exactement. Mais, même si a_2 atteint 30 pour-cent de a_1 , u dépasse $a_1/\sqrt{3}$ de moins de 5 pour-cent.

4.3.10 Il est important de ne pas compter deux fois les mêmes composantes de l'incertitude. Si une composante d'incertitude provenant d'un effet particulier est obtenue par une évaluation de Type B, elle ne doit être introduite comme composante indépendante dans le calcul de l'incertitude-type composée du résultat de mesure que dans la limite où l'effet ne contribue pas à la variabilité observée des observations. L'incertitude due à la partie de l'effet qui contribue à la variabilité observée est déjà incluse dans la composante de l'incertitude obtenue par l'analyse statistique des observations.

4.3.11 Les exemples de l'évaluation de Type B de l'incertitude-type de 4.3.3 à 4.3.9 sont seulement proposés à titre indicatif. De plus, il faut fonder le plus possible les évaluations de l'incertitude sur des données quantitatives, comme cela est souligné en 3.4.1 et 3.4.2.

4.4 Illustration graphique de l'évaluation de l'incertitude-type

4.4.1 La Figure 1 représente l'estimation de la valeur d'une grandeur d'entrée X_i et l'évaluation de l'incertitude de cette estimation à partir de la loi inconnue des valeurs mesurées possibles de X_i , ou à partir de la loi de probabilité de X_i , échantillonnée par des observations répétées.

4.4.2 Dans la Figure 1 a), on suppose que la grandeur d'entrée X_i est une température t et que sa loi inconnue est normale avec une espérance mathématique $\mu_t = 100$ °C et un écart-type $\sigma = 1,5$ °C. Sa densité de probabilité (voir C.2.14) est alors

$$p(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{t - \mu_t}{\sigma} \right)^2 \right]$$

NOTE La définition d'une densité de probabilité $p(z)$ nécessite que la relation $\int p(z)dz = 1$ soit satisfaite.

4.4.3 La Figure 1 b) présente un histogramme de $n = 20$ observations répétées t_k de la température t qui sont supposées avoir été prises au hasard à partir de la loi de la Figure 1 a). Pour obtenir l'histogramme, les 20 observations ou échantillons, dont les valeurs sont données au Tableau 1, sont groupés en intervalles de largeur 1 °C. (La préparation d'un histogramme n'est évidemment pas nécessaire pour l'analyse statistique des données.)

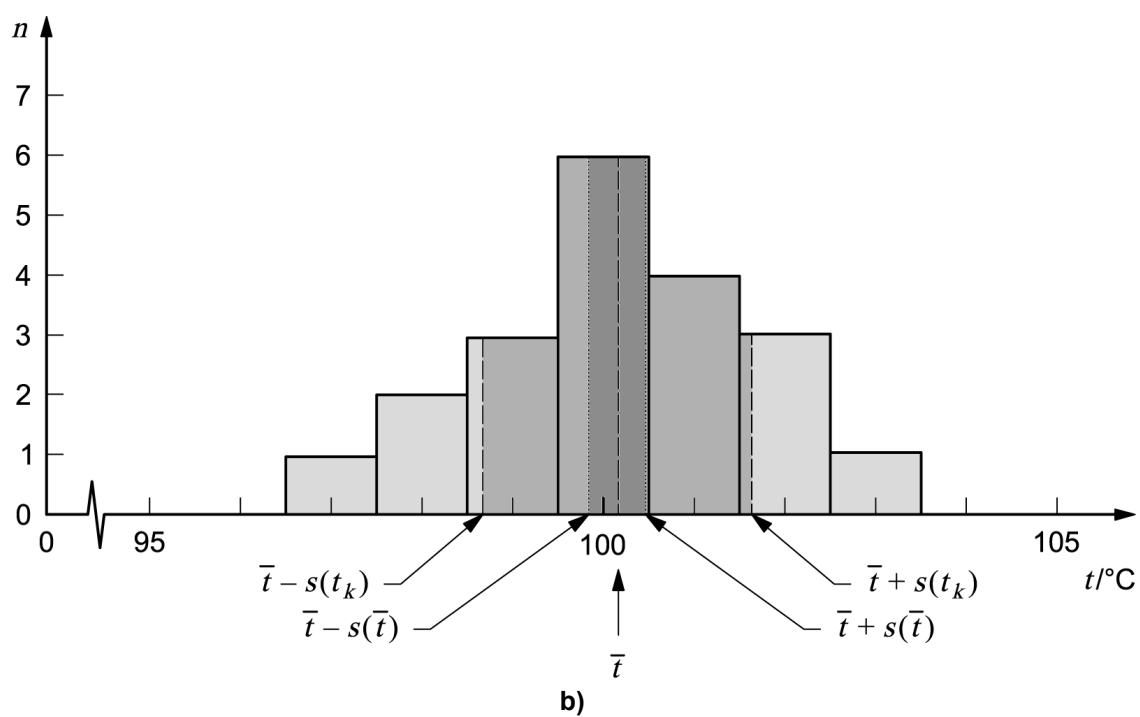
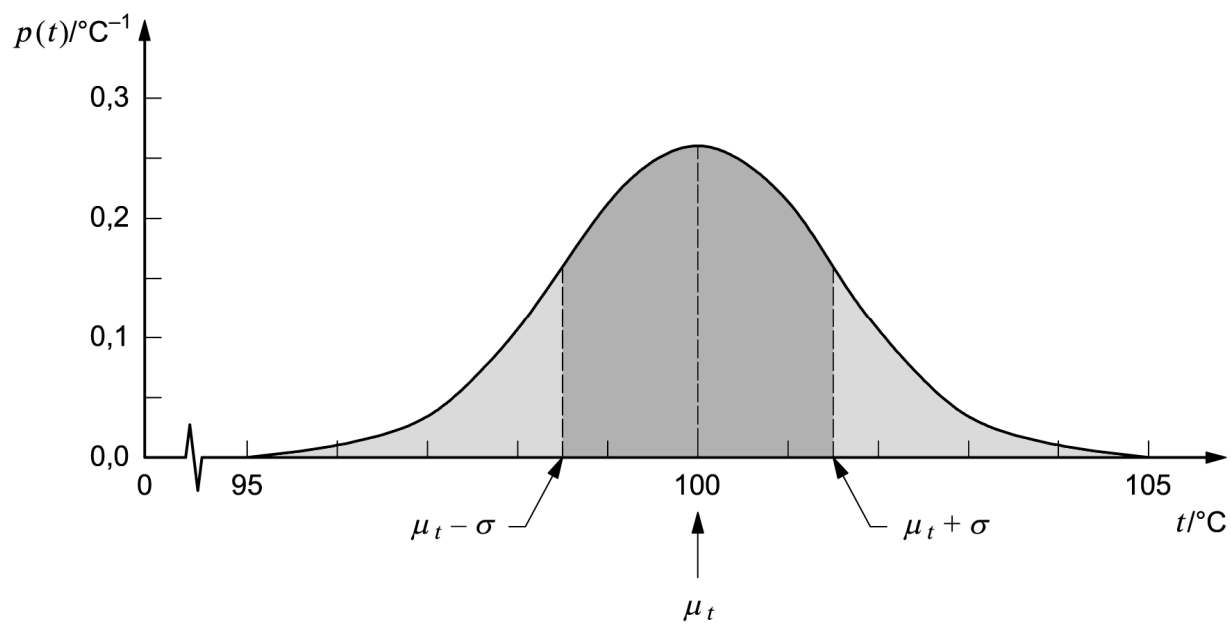


Figure 1 — Illustration graphique de l'évaluation de l'incertitude-type d'une grandeur d'entrée à partir d'observations répétées

Tableau 1 — Vingt observations répétées de la température t groupées en intervalles de 1 °C

Intervalle $t_1 \leq t < t_2$		Température
$t_1/^\circ\text{C}$	$t_2/^\circ\text{C}$	$t/^\circ\text{C}$
94,5	95,5	—
95,5	96,5	—
96,5	97,5	96,90
97,5	98,5	98,18; 98,25
98,5	99,5	98,61; 99,03; 99,49
99,5	100,5	99,56; 99,74; 99,89; 100,07; 100,33; 100,42
100,5	101,5	100,68; 100,95; 101,11; 101,20
101,5	102,5	101,57; 101,84; 102,36
102,5	103,5	102,72
103,5	104,5	—
104,5	105,5	—

La moyenne arithmétique $\bar{t}$ des $n = 20$ observations, calculée selon l'Équation (3) est $\bar{t} = 100,145\text{ °C} \approx 100,14\text{ °C}$ et elle est supposée être la meilleure estimation de l'espérance mathématique μ_t de t sur la base des données disponibles. L'écart-type expérimental $s(t_k)$ calculé selon l'Équation (4) est $s(t_k) = 1,489\text{ °C} \approx 1,49\text{ °C}$, et l'écart-type expérimental de la moyenne $s(\bar{t})$ calculé selon l'Équation (5) et qui est l'incertitude-type $u(\bar{t})$ de la moyenne $\bar{t}$, est $u(\bar{t}) = s(\bar{t}) = s(t_k)/\sqrt{20} = 0,333\text{ °C} \approx 0,33\text{ °C}$. (En vue de calculs ultérieurs, on a intérêt à conserver tous les chiffres.)

NOTE Bien que les données du Tableau 1 ne soient pas invraisemblables si l'on considère l'utilisation généralisée de thermomètres électroniques numériques à haute résolution, elles sont données pour illustration et ne doivent pas être nécessairement interprétées comme décrivant un mesurage réel.

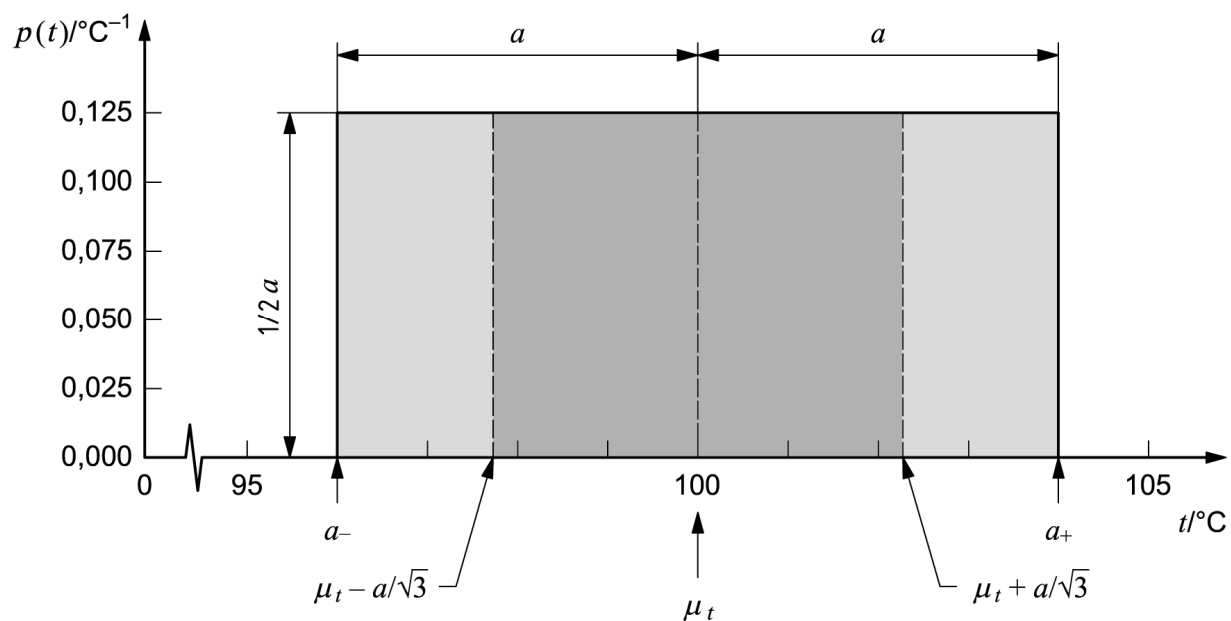
4.4.4 La Figure 2 représente l'estimation de la valeur d'une grandeur d'entrée X_i et l'évaluation de l'incertitude de cette estimation à partir d'une loi *a priori* des valeurs possibles de X_i , ou d'une loi de probabilité de X_i , sur la base de la totalité des informations disponibles. Pour les deux cas présentés, on suppose de nouveau que la grandeur d'entrée est une température t .

4.4.5 Dans le cas illustré par la Figure 2 a), on suppose que l'on possède peu d'information sur la grandeur d'entrée t et que tout ce que l'on peut faire est de supposer que t est décrit par une loi de probabilité *a priori* rectangulaire symétrique de limite inférieure $a_- = 96\text{ °C}$, et de limite supérieure $a_+ = 104\text{ °C}$, avec une demi-largeur égale alors à $a = (a_+ - a_-)/2 = 4\text{ °C}$ (voir 4.3.7). La densité de probabilité de t est alors

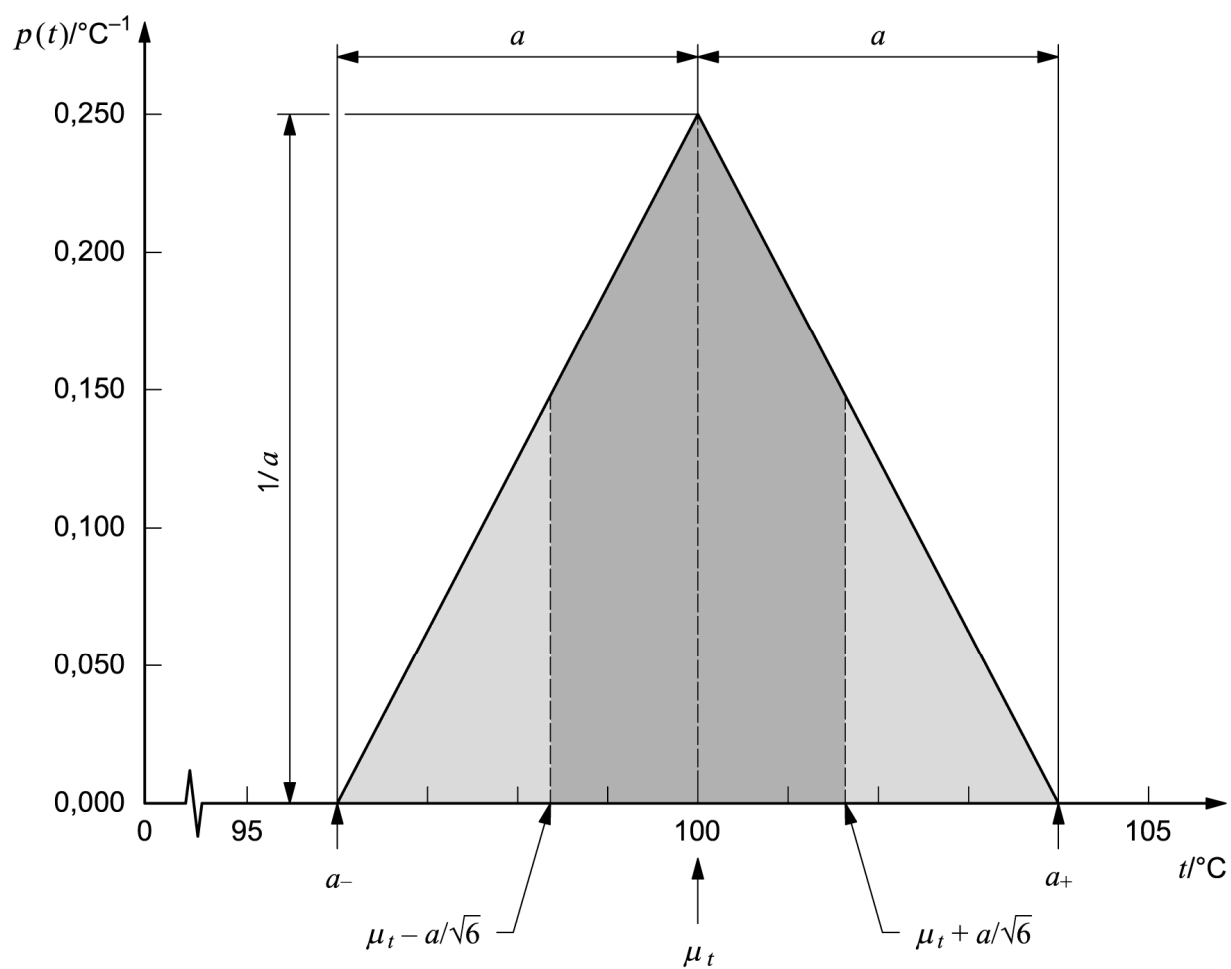
$$p(t) = 1/(2a) \quad \text{pour } a_- \leq t \leq a_+$$

$$p(t) = 0 \quad \text{pour } t < a_- \text{ ou } t > a_+$$

Comme indiqué en 4.3.7, la meilleure estimation de t est son espérance mathématique $\mu_t = (a_+ + a_-)/2 = 100\text{ °C}$, selon C.3.1. L'incertitude-type de cette estimation est $u(\mu_t) = a/\sqrt{3} \approx 2,3\text{ °C}$, selon C.3.2 [voir Équation (7)].



a)



b)

Figure 2 — Illustration graphique de l'évaluation de l'incertitude-type d'une grandeur d'entrée à partir d'une loi *a priori*

4.4.6 Pour le cas illustré par la Figure 2 b), on suppose que l'information disponible concernant t est moins limitée et que t peut être décrit par une loi de probabilité *a priori* triangulaire symétrique, de même limite inférieure $a_- = 96$ °C, de même limite supérieure $a_+ = 104$ °C et, donc, de même demi-largeur $a = (a_+ - a_-)/2 = 4$ °C comme en 4.4.5 (voir 4.3.9). La densité de probabilité de t est alors

$$p(t) = (t - a_-)/a^2 \quad \text{pour} \quad a_- \leq t \leq (a_+ + a_-)/2$$

$$p(t) = (a_+ - t)/a^2 \quad \text{pour} \quad (a_+ + a_-)/2 \leq t \leq a_+$$

$$p(t) = 0 \quad \text{pour} \quad t < a_- \quad \text{ou} \quad t > a_+$$

Comme cela est indiqué en 4.3.9, l'espérance mathématique de t est $\mu_t = (a_+ + a_-)/2 = 100$ °C, selon C.3.1. L'incertitude-type de cette estimation est $u(\mu_t) = a/\sqrt{6} \approx 1,6$ °C, selon C.3.2 [voir Équation (9b)].

La valeur ci-dessus, $u(\mu_t) = 1,6$ °C, peut être comparée à $u(\mu_t) = 2,3$ °C obtenu en 4.4.5 à partir d'une loi rectangulaire de même largeur de 8 °C; elle peut être aussi comparée à $\sigma = 1,5$ °C de la loi normale de la Figure 1 a) pour laquelle la largeur de $-2,58\sigma$ à $+2,58\sigma$, qui comprend 99 pour-cent de la loi, est de l'ordre de 8 °C, et elle peut enfin être comparée à $u(\bar{t}) = 0,33$ °C obtenu en 4.4.3 à partir de 20 observations supposées avoir été prises au hasard à partir de la même loi normale.

5 Détermination de l'incertitude-type composée

5.1 Grandeurs d'entrée non corrélées

Ce paragraphe traite le cas où toutes les grandeurs d'entrée sont **indépendantes** (C.3.7). Le cas où il existe une relation entre deux grandeurs d'entrée ou plus, c'est-à-dire où elles sont interdépendantes ou **corrélées** (C.2.8), est développé en 5.2.

5.1.1 L'incertitude-type de y , où y est l'estimation du mesurande Y , donc le résultat du mesurage, est obtenue par une composition appropriée des incertitudes-types des estimations d'entrée $x_1, x_2, \dots, x_N$ (voir 4.1). Cette *incertitude-type composée* de l'estimation y est notée $u_c(y)$.

NOTE Pour des raisons semblables à celles qui sont données dans la Note de 4.3.1, les symboles $u_c(y)$ et $u_c^2(y)$ sont utilisés dans tous les cas.

5.1.2 L'incertitude-type composée $u_c(y)$ est la racine carrée de la variance composée $u_c^2(y)$, donnée par

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 u^2(x_i) \quad (10)$$

où f est la fonction donnée dans l'Équation (1). Chaque $u(x_i)$ est une incertitude-type évaluée comme décrit en 4.2 (évaluation de Type A) ou comme en 4.3 (évaluation de Type B). L'incertitude-type composée $u_c(y)$ est un écart-type estimé et caractérise la dispersion des valeurs qui pourraient être raisonnablement attribuées au mesurande Y (voir 2.2.3).

L'Équation (10) et sa contrepartie pour les grandeurs d'entrée corrélées, l'Équation (13), fondées toutes les deux sur une approximation en série de Taylor du premier ordre de $Y = f(X_1, X_2, \dots, X_N)$, expriment ce qui est appelé dans ce Guide la *loi de propagation de l'incertitude* (voir E.3.1 et E.3.2).

NOTE Lorsque la non-linéarité de f devient significative, il faut inclure des termes d'ordre plus élevé dans le développement en série de Taylor pour l'expression de $u_c^2(y)$, Équation (10). Lorsque la loi de chaque X_i est normale, les termes les plus importants d'ordre immédiatement plus élevé à ajouter aux termes de l'Équation (10) sont

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right)^2 + \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j^2} \right] u^2(x_i) u^2(x_j)$$

Voir H.1 pour un exemple d'une situation où il est nécessaire de prendre en compte la contribution de termes de $u_c^2(y)$ d'ordre plus élevé.

5.1.3 Les dérivées partielles $\partial f / \partial x_i$ sont égales à $\partial f / \partial X_i$ évaluées à $X_i = x_i$ (voir Note 1 ci-dessous). Ces dérivées, souvent appelées coefficients de sensibilité, décrivent comment varie l'estimation de sortie y en fonction des variations dans les valeurs des estimations d'entrée $x_1, x_2, \dots, x_N$. En particulier, la variation sur y produite par une petite variation Δx_i sur l'estimation d'entrée x_i est donnée par $(\Delta y)_i = (\partial f / \partial x_i)(\Delta x_i)$. Si cette variation est due à l'incertitude-type de l'estimation x_i , la variation correspondante de y est $(\partial f / \partial x_i)u(x_i)$. La variance composée $u_c^2(y)$ peut alors être considérée comme une somme de termes dont chacun représente la variance estimée associée à l'estimation de sortie y due à la variance estimée associée à chaque estimation d'entrée x_i . Cela suggère d'écrire l'Équation (10) sous la forme

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^N [c_i u(x_i)]^2 \equiv \sum_{i=1}^N u_i^2(y) \quad (11a)$$

où

$$c_i \equiv \partial f / \partial x_i, \quad u_i(y) \equiv |c_i| u(x_i) \quad (11b)$$

NOTE 1 En toute rigueur, les dérivées partielles sont $\partial f / \partial x_i = \partial f / \partial X_i$ évaluées pour les espérances mathématiques des X_i . En pratique cependant, les dérivées partielles sont estimées par

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \left. \frac{\partial f}{\partial X_i} \right|_{x_1, x_2, \dots, x_N}$$

NOTE 2 L'incertitude-type composée $u_c(y)$ peut être calculée numériquement en remplaçant $c_i u(x_i)$ dans l'Équation (11a) par

$$Z_i = \frac{1}{2} \left\{ f[x_1, \dots, x_i + u(x_i), \dots, x_N] - f[x_1, \dots, x_i - u(x_i), \dots, x_N] \right\}$$

C'est-à-dire que $u_i(y)$ est évalué numériquement en calculant la variation de y due à une variation de x_i de $+u(x_i)$ et de $-u(x_i)$. La valeur de $u_i(y)$ peut alors être prise comme étant égale à $|Z_i|$ et la valeur du coefficient de sensibilité correspondant c_i comme $Z_i / u(x_i)$.

EXEMPLE Pour l'exemple de 4.1.1, en utilisant par simplicité de notation le même symbole pour la grandeur et son estimation,

$$c_1 \equiv \partial P / \partial V = 2V / \left\{ R_0 [1 + \alpha(t - t_0)] \right\} = 2P / V$$

$$c_2 \equiv \partial P / \partial R_0 = -V^2 / \left\{ R_0^2 [1 + \alpha(t - t_0)] \right\} = -P / R_0$$

$$c_3 \equiv \partial P / \partial \alpha = -V^2(t - t_0) / \left\{ R_0 [1 + \alpha(t - t_0)]^2 \right\} = -P(t - t_0) / [1 + \alpha(t - t_0)]$$

$$c_4 \equiv \partial P / \partial t = -V^2 \alpha / \left\{ R_0 [1 + \alpha(t - t_0)]^2 \right\} = -P \alpha / [1 + \alpha(t - t_0)]$$

et

$$\begin{aligned}
 u^2(P) &= \left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)^2 u^2(V) + \left(\frac{\partial P}{\partial R_0}\right)^2 u^2(R_0) + \left(\frac{\partial P}{\partial \alpha}\right)^2 u^2(\alpha) + \left(\frac{\partial P}{\partial t}\right)^2 u^2(t) \\
 &= [c_1 u(V)]^2 + [c_2 u(R_0)]^2 + [c_3 u(\alpha)]^2 + [c_4 u(t)]^2 \\
 &= u_1^2(P) + u_2^2(P) + u_3^2(P) + u_4^2(P)
 \end{aligned}$$

5.1.4 Au lieu d'être calculés à partir de la fonction f , les coefficients de sensibilité $\partial f / \partial x_i$ sont parfois déterminés expérimentalement: on mesure la variation de Y produite par une variation d'un X_i donné tout en maintenant constantes les autres grandeurs d'entrée. Dans ce cas, la connaissance de la fonction f (ou une partie de celle-ci lorsqu'on détermine seulement de cette façon certains coefficients de sensibilité) est, en conséquence, réduite à un développement empirique en série de Taylor du premier ordre sur la base des coefficients de sensibilité mesurés.

5.1.5 Si l'Équation (1) pour le mesurande Y est développée autour des valeurs nominales $X_{i,0}$ des grandeurs d'entrée X_i , alors, au premier ordre (qui est habituellement une approximation convenable), $Y = Y_0 + c_1 \delta_1 + c_2 \delta_2 + \dots + c_N \delta_N$, où $Y_0 = f(X_{1,0}, X_{2,0}, \dots, X_{N,0})$, $c_i = (\partial f / \partial X_i)$ évalués à $X_i = X_{i,0}$, et $\delta_i = X_i - X_{i,0}$. En conséquence, pour les besoins d'une analyse d'incertitude, on obtient habituellement une approximation d'un mesurande par une fonction linéaire de ses variables en transformant ses grandeurs d'entrée X_i en δ_i (voir E.3.1).

EXEMPLE À partir de l'Exemple 2 de 4.3.7, l'estimation de la valeur du mesurande V est $V = \bar{V} + \Delta \bar{V}$, avec $\bar{V} = 0,928\,571\text{ V}$, $u(\bar{V}) = 12\,\mu\text{V}$, la correction additive $\Delta \bar{V} = 0$, et $u(\Delta \bar{V}) = 8,7\,\mu\text{V}$. Puisque $\partial V / \partial \bar{V} = 1$, et que $\partial V / \partial (\Delta \bar{V}) = 1$, la variance composée associée à V est donnée par

$$u_c^2(V) = u^2(\bar{V}) + u^2(\Delta \bar{V}) = (12\,\mu\text{V})^2 + (8,7\,\mu\text{V})^2 = 219 \times 10^{-12}\text{ V}^2$$

et l'incertitude-type composée est $u_c(V) = 15\,\mu\text{V}$, qui correspond à une incertitude-type composée relative $u_c(V)/V$ de 16×10^{-6} (voir 5.1.6). C'est un exemple du cas où le mesurande est déjà une fonction linéaire des grandeurs dont il dépend, avec les coefficients $c_i = +1$. On déduit de l'Équation (10) que si $Y = c_1 X_1 + c_2 X_2 + \dots + c_N X_N$ et si les constantes $c_i = +1$ ou -1 , alors $u_c^2(y) = \sum_{i=1}^N u^2(x_i)$.

5.1.6 Si Y est de la forme $Y = c X_1^{p_1} X_2^{p_2} \dots X_N^{p_N}$ et si les exposants p_i sont des nombres connus, positifs ou négatifs, d'incertitudes négligeables, la variance composée, Équation (10) peut être exprimée sous la forme

$$[u_c(y)/y]^2 = \sum_{i=1}^N [p_i u(x_i)/x_i]^2 \quad (12)$$

C'est une forme analogue à l'Équation (11a) mais avec la variance composée $u_c^2(y)$ exprimée sous la forme d'une *variance composée relative* $[u_c(y)/y]^2$ et avec la variance estimée $u^2(x_i)$ associée à chaque estimation d'entrée exprimée sous la forme d'une *variance relative* estimée $[u(x_i)/x_i]^2$. [L'*incertitude-type composée relative* est $u_c(y)/|y|$ et l'*incertitude-type relative* de chaque estimation d'entrée est $u(x_i)/|x_i|$, $|y| \neq 0$ et $|x_i| \neq 0$.]

NOTE 1 Lorsque Y prend cette forme, sa transformation en une fonction linéaire des variables (voir 5.1.5) est aisément obtenue en posant $X_i = X_{i,0}(1 + \delta_i)$; il en résulte la relation approchée suivante: $(Y - Y_0)/Y_0 = \sum_{i=1}^N p_i \delta_i$. D'autre part, la transformation logarithmique $Z = \ln Y$ et $W_i = \ln X_i$ conduit à une linéarisation exacte pour les nouvelles variables: $Z = \ln c + \sum_{i=1}^N p_i W_i$.

NOTE 2 Si chaque p_i vaut $+1$ ou -1 , l'Équation (12) devient $[u_c(y)/y]^2 = \sum_{i=1}^N [u(x_i)/x_i]^2$, qui montre que, dans ce cas spécial, la variance composée relative associée à l'estimation y est simplement égale à la somme des variances relatives estimées associées aux estimations d'entrée x_i .

5.2 Grandeurs d'entrée corrélées

5.2.1 L'Équation (10) et celles qui s'en déduisent, telles (11a) et (12), ont leur validité limitée au cas où les grandeurs d'entrée X_i sont indépendantes ou non corrélées (il s'agit des variables aléatoires, non des

grandeurs physiques supposées être invariantes — voir [4.1.1](#), Note 1). Si certains des X_i sont corrélés significativement, il faut prendre en compte les corrélations.

5.2.2 Lorsque les grandeurs d'entrée sont corrélées, l'expression convenable pour la variance composée $u_c^2(y)$ associée au résultat d'un mesurage est

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} u(x_i, x_j) = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 u^2(x_i) + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} u(x_i, x_j) \quad (13)$$

où x_i et x_j sont les estimations de X_i et X_j et $u(x_i, x_j) = u(x_j, x_i)$ est la covariance estimée associée à x_i et x_j . Le degré de corrélation entre x_i et x_j est caractérisé par le **coefficient de corrélation** estimé ([C.3.6](#))

$$r(x_i, x_j) = \frac{u(x_i, x_j)}{u(x_i)u(x_j)} \quad (14)$$

où $r(x_i, x_j) = r(x_j, x_i)$ et $-1 \leq r(x_i, x_j) \leq +1$. Si les estimations x_i et x_j sont indépendantes, $r(x_i, x_j) = 0$ et une variation pour l'un des deux n'entraîne pas une variation prévisible pour l'autre. (Voir [C.2.8](#), [C.3.6](#) et [C.3.7](#) pour une présentation complémentaire.)

En utilisant les coefficients de corrélation, qui sont plus facilement interprétables que les covariances, le terme de covariance de l'Équation (13) peut s'écrire

$$2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} u(x_i) u(x_j) r(x_i, x_j) \quad (15)$$

En tenant compte de l'Équation (11b), l'Équation (13) devient alors

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^N c_i^2 u^2(x_i) + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N c_i c_j u(x_i) u(x_j) r(x_i, x_j) \quad (16)$$

NOTE 1 Dans le cas tout à fait spécial où la *totalité* des estimations d'entrée est corrélée avec des coefficients de corrélation $r(x_i, x_j) = +1$, l'Équation (16) se réduit à

$$u_c^2(y) = \left[\sum_{i=1}^N c_i u(x_i) \right]^2 = \left[\sum_{i=1}^N \frac{\partial f}{\partial x_i} u(x_i) \right]^2$$

L'incertitude-type composée $u_c(y)$ est alors simplement une *somme linéaire* de termes représentant les variations de la grandeur de sortie y générées par une variation de chaque estimation d'entrée x_i égale à son incertitude-type $u(x_i)$ (voir [5.1.3](#)). [Cette somme linéaire ne doit pas être confondue avec la loi générale de propagation de l'erreur bien qu'elle présente une forme analogue; les incertitudes-types ne sont pas des erreurs (voir [E.3.2](#)).]

EXEMPLE Dix résistances, chacune de valeur nominale $R_i = 1\,000\,\Omega$, sont étalonnées avec une incertitude négligeable lors de leur comparaison à la même résistance R_s de $1\,000\,\Omega$ caractérisée par une incertitude-type $u(R_s) = 100\,\text{m}\Omega$ donnée dans son certificat d'étalonnage. Les résistances sont connectées en série avec des fils de résistance négligeable pour obtenir une résistance de référence R_{ref} de valeur nominale de $10\,\text{k}\Omega$. Alors $R_{\text{ref}} = f(R_i) = \sum_{i=1}^{10} R_i$. Puisque $r(x_i, x_j) = r(R_i, R_j) = +1$ pour chaque paire de résistances (voir [F.1.2.3](#), Exemple 2), l'équation de cette note s'applique. Puisque l'on a pour chaque résistance $\partial f / \partial x_i = \partial R_{\text{ref}} / \partial R_i = 1$, et $u(x_i) = u(R_i) = u(R_s)$ (voir [F.1.2.3](#), Exemple 2), cette équation donne pour l'incertitude-type composée de R_{ref} , $u_c(R_{\text{ref}}) = \sum_{i=1}^{10} u(R_s) = 10 \times (100\,\text{m}\Omega) = 1\,\Omega$. Le résultat $u_c(R_{\text{ref}}) = \left[\sum_{i=1}^{10} u^2(R_s) \right]^{1/2} = 0,32\,\Omega$ obtenu à partir de l'Équation (10) serait incorrect car il ne prendrait pas en compte le fait que la totalité des valeurs d'étalonnage des dix résistances est corrélée.

NOTE 2 Les variances estimées $u^2(x_i)$ et les covariances estimées $u(x_i, x_j)$ peuvent être considérées comme les éléments d'une matrice de covariance d'éléments u_{ij} . Les éléments diagonaux u_{ii} de la matrice sont les variances $u^2(x_i)$, tandis que les éléments non diagonaux $u_{ij} (i \neq j)$ sont les covariances $u(x_i, x_j) = u(x_j, x_i)$. Si deux estimations d'entrée ne sont pas corrélées, leur covariance associée ainsi que les éléments correspondants u_{ij} et u_{ji} de la matrice de covariance sont égaux à zéro. Si les estimations d'entrée sont toutes non corrélées, tous les éléments non diagonaux sont nuls et la matrice de covariance est diagonale. (Voir aussi [C.3.5](#).)

NOTE 3 Dans le but d'une évaluation numérique, l'Équation (16) peut s'écrire

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N Z_i Z_j r(x_i, x_j)$$

où Z_i est donné en [5.1.3](#), Note 2.

NOTE 4 Si les X_i de la forme spéciale considérée en [5.1.6](#) sont corrélés, il faut alors ajouter les termes

$$2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \left[p_i u(x_i) / x_i \right] \left[p_j u(x_j) / x_j \right] r(x_i, x_j)$$

au membre de droite de l'Équation (12).

5.2.3 Considérons deux moyennes arithmétiques $\bar{q}$ et $\bar{r}$ qui estiment les espérances mathématiques μ_q et μ_r de deux grandeurs q et r variant au hasard et supposons que $\bar{q}$ et $\bar{r}$ soient calculés à partir de n paires indépendantes d'observations simultanées de q et r faites dans les mêmes conditions de mesure (voir [B.2.15](#)). Alors, la covariance (voir [C.3.4](#)) de $\bar{q}$ et $\bar{r}$ est estimée par

$$s(\bar{q}, \bar{r}) = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{k=1}^n (q_k - \bar{q})(r_k - \bar{r}) \quad (17)$$

où q_k et r_k sont les observations individuelles des grandeurs q et r et où $\bar{q}$ et $\bar{r}$ sont calculés à partir des observations selon l'Équation (3). Si les observations sont en fait non corrélées, on peut s'attendre à ce que la covariance calculée soit proche de zéro.

Ainsi, la covariance estimée de deux grandeurs d'entrée corrélées X_i et X_j qui sont estimées par les moyennes $\bar{X}_i$ et $\bar{X}_j$ déterminées à partir de paires indépendantes d'observations simultanées répétées est donnée par $u(x_i, x_j) = s(\bar{X}_i, \bar{X}_j)$, avec $s(\bar{X}_i, \bar{X}_j)$ calculé selon l'Équation (17). Cette application de l'Équation (17) est une évaluation de Type A de la covariance. Le coefficient de corrélation estimé de $\bar{X}_i$ et $\bar{X}_j$ est obtenu à partir de l'Équation (14): $r(x_i, x_j) = r(\bar{X}_i, \bar{X}_j) = s(\bar{X}_i, \bar{X}_j) / [s(\bar{X}_i)s(\bar{X}_j)]$.

NOTE Des exemples où il faut utiliser les covariances telles que calculées à partir de l'Équation (17) sont donnés en [H.2](#) et [H.4](#).

5.2.4 Il peut y avoir une corrélation significative entre deux grandeurs d'entrée si l'on utilise pour leur détermination le même instrument de mesure, le même étalon physique ou la même donnée de référence ayant une incertitude-type significative. Par exemple, si l'on utilise un thermomètre donné pour déterminer une correction de température nécessaire pour l'estimation de la valeur d'une grandeur d'entrée X_i et si le même thermomètre est utilisé pour déterminer une correction de température similaire nécessaire pour l'estimation de la grandeur d'entrée X_j , les deux grandeurs d'entrée pourraient être corrélées de manière significative. Cependant, si, dans cet exemple, X_i et X_j sont redéfinis comme grandeurs non corrigées et que les grandeurs qui définissent la courbe d'étalonnage pour le thermomètre sont incluses comme grandeurs d'entrée additionnelles avec des incertitudes-types indépendantes, la corrélation entre X_i et X_j disparaît. (Voir [F.1.2.3](#) et [F.1.2.4](#) pour une présentation plus complète.)

5.2.5 Les corrélations entre grandeurs d'entrée ne peuvent être ignorées si elles sont présentes et significatives. Les covariances associées doivent être évaluées expérimentalement, si cela est possible, en faisant varier les grandeurs d'entrée corrélées (voir [C.3.6](#), Note 3) ou en utilisant l'ensemble des informations disponibles sur la variabilité corrélée des grandeurs en question (évaluation de Type B de la covariance). La perspicacité fondée sur l'expérience et les connaissances générales (voir [4.3.1](#) et [4.3.2](#)) est spécialement nécessaire lorsqu'on estime le degré de corrélation entre des grandeurs d'entrée provenant des effets

communs d'influences telles que la température ambiante, la pression atmosphérique et le degré hygrométrique. Par chance, dans de nombreux cas, les effets de ces grandeurs d'influence présentent une interdépendance négligeable et les grandeurs d'entrée affectées peuvent être supposées non corrélées. S'il n'est pas possible de supposer qu'elles ne sont pas corrélées, on peut cependant éviter ces corrélations en introduisant ces grandeurs d'influence communes comme grandeurs d'entrée indépendantes additionnelles, comme indiqué en [5.2.4](#).

6 Détermination de l'incertitude élargie

6.1 Introduction

6.1.1 La Recommandation INC-1 (1980) du Groupe de travail sur l'expression des incertitudes, fondement de ce *Guide* (voir l'[Introduction](#)), et les Recommandations 1 (CI-1981) et 1 (CI-1986) du CIPM qui approuvent et confirment INC-1 (1980) (voir [A.2](#) et [A.3](#)) préconisent l'utilisation de l'incertitude-type composée $u_c(y)$ comme paramètre pour exprimer quantitativement l'incertitude du résultat d'un mesurage. En effet, le CIPM a demandé par la seconde de ces Recommandations que ce qui est maintenant appelé incertitude-type composée $u_c(y)$ soit utilisé pour l'expression des résultats par «tous les participants aux comparaisons internationales et aux autres travaux effectués sous les auspices du CIPM et de ses Comités consultatifs».

6.1.2 Bien que $u_c(y)$ puisse être utilisé universellement pour exprimer l'incertitude d'un résultat de mesure, il est souvent nécessaire, pour certaines applications commerciales, industrielles ou réglementaires, ou lorsque cela concerne la santé ou la sécurité, de donner une mesure de l'incertitude qui définisse, autour du résultat de mesure, un intervalle à l'intérieur duquel on puisse espérer voir se situer une large fraction de la distribution des valeurs qui pourraient être raisonnablement attribuées au mesurande. Le Groupe de travail a reconnu l'existence de cette exigence et le paragraphe 5 de la Recommandation INC-1 (1980) en est une conséquence. La Recommandation 1 (CI-1986) du CIPM le reflète également.

6.2 Incertitude élargie

6.2.1 La nouvelle mesure de l'incertitude qui satisfait à l'exigence de fournir un intervalle tel qu'indiqué en [6.1.2](#) est appelée *incertitude élargie* et se note U . L'incertitude élargie U s'obtient en multipliant l'incertitude-type composée $u_c(y)$ par un *facteur d'élargissement* k :

$$U = k u_c(y) \quad (18)$$

Il est alors commode d'exprimer le résultat d'un mesurage sous la forme $Y = y \pm U$, qui s'interprète comme signifiant que la meilleure estimation de la valeur attribuable au mesurande Y est y , et qu'on peut s'attendre à ce que l'intervalle de $y - U$ à $y + U$ comprenne une fraction élevée de la distribution des valeurs qui pourraient être attribuées raisonnablement à Y . Un tel intervalle s'exprime aussi par $y - U \leq Y \leq y + U$.

6.2.2 Les termes **intervalle de confiance** ([C.2.27](#), [C.2.28](#)) et **niveau de confiance*** ([C.2.29](#)) ont des définitions spécifiques en statistique et s'appliquent seulement à l'intervalle défini par U lorsque certaines conditions sont remplies, y compris celle que toutes les composantes de l'incertitude qui contribuent à $u_c(y)$ soient obtenues par des évaluations de Type A. En conséquence, dans ce *Guide*, on n'utilise pas le terme «intervalle de confiance» pour l'intervalle défini par U ; de même on n'utilise pas le terme «niveau de confiance*» (avec astérisque, correspondant en anglais à «confidence level») et on utilise le terme «niveau de confiance» (sans astérisque, correspondant en anglais à «level of confidence») pris dans son sens littéral. Plus spécifiquement, U est interprété comme définissant, autour du résultat de mesurage, un intervalle qui comprend une fraction élevée p de la loi caractérisée par ce résultat et son incertitude-type composée et p est la *probabilité* ou *niveau de confiance* de l'intervalle.

6.2.3 Chaque fois que cela est possible, le niveau de confiance p associé à l'intervalle défini par U doit être estimé et donné. On doit reconnaître que le fait de multiplier $u_c(y)$ par une constante ne fournit pas d'information nouvelle mais présente sous une forme différente l'information qui était déjà disponible. On doit aussi reconnaître que dans de nombreux cas, le niveau de confiance p (spécialement pour les valeurs de p voisines de 1) est quelque peu incertain, non seulement en raison d'une connaissance limitée de la loi de probabilité caractérisée par y et $u_c(y)$ (particulièrement dans les régions extrêmes), mais aussi à cause de l'incertitude de $u_c(y)$ elle-même (voir Note 2 de [2.3.5](#), [6.3.2](#), [6.3.3](#) et Annexe G, particulièrement [G.6.6](#)).

NOTE Pour les formes qu'il est préférable d'utiliser pour présenter le résultat d'un mesurage suivant que l'on exprime l'incertitude par $u_c(y)$ ou par U , voir respectivement [7.2.2](#) et [7.2.4](#).

6.3 Choix d'un facteur d'élargissement

6.3.1 La valeur du facteur d'élargissement k est choisie sur la base du niveau de confiance requis pour l'intervalle $y - U$ à $y + U$. En général, k sera dans la plage de 2 à 3. Cependant, pour des applications spéciales, k peut être choisi en dehors de cette plage. Une grande expérience et une connaissance étendue des utilisations dans lesquelles peut entrer un résultat de mesure peut faciliter le choix d'une valeur convenable pour k .

NOTE On peut trouver parfois qu'une correction connue b pour un effet systématique n'a pas été appliquée au résultat donné d'un mesurage mais qu'on a essayé de prendre l'effet en compte en élargissant l'«incertitude» affectée au résultat. Cela doit être évité. Ne pas appliquer de correction au résultat d'un mesurage pour un effet systématique significatif connu devrait être réservé à des circonstances très spéciales (voir [F.2.4.5](#) pour un cas spécifique et son traitement). L'évaluation de l'incertitude d'un résultat de mesure ne doit pas être confondue avec l'attribution d'une limite de sécurité à une grandeur donnée.

6.3.2 Idéalement, on aimerait pouvoir choisir une valeur spécifique du facteur d'élargissement k qui fournisse un intervalle $Y = y \pm U = y \pm k u_c(y)$ correspondant à un niveau de confiance particulier p , tel que 95 ou 99 pour-cent; et, de manière équivalente, pour une valeur donnée de k , on aimerait pouvoir énoncer de manière non équivoque le niveau de confiance associé à cet intervalle. Il n'est cependant pas facile de le faire en pratique parce que cela nécessite une connaissance étendue de la loi de probabilité caractérisée par le résultat de mesure y et son incertitude-type composée $u_c(y)$. Bien que ces paramètres soient d'importance critique, ils sont par eux-mêmes insuffisants pour pouvoir établir des intervalles ayant des niveaux de confiance exactement connus.

6.3.3 La Recommandation INC-1 (1980) ne spécifie pas comment l'on doit établir la relation entre k et p . Ce problème est traité en Annexe [G](#) et une méthode recommandée pour sa solution approximative est présentée en [G.4](#) et résumée en [G.6.4](#). Cependant, une approche plus simple, présentée en [G.6.6](#) convient souvent dans les situations de mesurage où la loi de probabilité caractérisée par y et $u_c(y)$ est approximativement normale et où le nombre effectif de degrés de liberté de $u_c(y)$ est significativement grand. Lorsque c'est le cas, ce qui arrive fréquemment en pratique, on peut supposer que le choix de $k = 2$ fournit un intervalle ayant un niveau de confiance de 95 pour-cent environ et que le choix de $k = 3$ fournit un intervalle ayant un niveau de confiance de 99 pour-cent environ.

NOTE Une méthode d'estimation du nombre effectif de degrés de liberté de $u_c(y)$ est donnée en [G.4](#). Le Tableau [G.2](#) de l'Annexe [G](#) peut être utilisé pour aider à décider de l'adéquation d'une solution à un mesurage particulier (voir [G.6.6](#)).

7 Expression de l'incertitude

7.1 Conseils généraux

7.1.1 En général, lorsqu'on monte dans la hiérarchie de la mesure, on exige davantage de détails sur la manière dont le résultat de mesure et son incertitude ont été obtenus. Cependant, à tout niveau de cette hiérarchie, y compris pour les activités commerciales et réglementaires sur les marchés, l'ingénierie dans l'industrie, les installations d'étalonnage de niveau élémentaire, la recherche et le développement industriels, la recherche fondamentale, les étalons primaires et les laboratoires d'étalonnage industriels, les laboratoires primaires nationaux et le BIPM, toute l'information nécessaire pour la réévaluation du mesurage doit être disponible pour ceux qui pourraient en avoir besoin. La différence principale consiste en ce qu'aux niveaux inférieurs de la chaîne hiérarchique, l'information nécessaire pourra être davantage disponible sous la forme de rapports publiés, de systèmes d'étalonnage ou d'essais, de spécifications d'essais, de certificats d'étalonnage et d'essais, de manuels d'instructions, de normes internationales ou nationales et de réglementations locales.

7.1.2 Lorsqu'on fournit les détails d'un mesurage, y compris la façon d'évaluer l'incertitude du résultat par référence à des documents publiés, comme c'est souvent le cas lorsqu'un certificat comporte des résultats d'étalonnage, il est impératif que ces documents soient tenus à jour afin qu'ils soient compatibles avec la procédure de mesure réellement utilisée.

7.1.3 De nombreux mesurages sont effectués chaque jour dans l'industrie et le commerce sans compte rendu explicite relatif à leur incertitude. Il en est cependant beaucoup qui sont effectués avec des instruments sujets à étalonnage périodique ou à inspection légale. S'il est reconnu que les instruments sont conformes à leurs spécifications ou aux documents normatifs existants applicables, on peut déduire les incertitudes de leurs indications à partir de ces spécifications ou de ces documents normatifs.

7.1.4 En pratique, la quantité d'information nécessaire pour documenter un résultat de mesure dépend de l'usage prévu; cependant, le principe de base reste inchangé: lorsqu'on exprime le résultat d'un mesurage et son incertitude, il vaut mieux pécher par excès d'information plutôt que par défaut. Par exemple, on doit:

- a) décrire clairement les méthodes utilisées pour calculer le résultat de mesure et son incertitude à partir des observations expérimentales et des données d'entrée;
- b) faire la liste de toutes les composantes de l'incertitude et documenter complètement la manière dont elles ont été évaluées;
- c) présenter l'analyse des résultats de telle façon que chacune de ses étapes importantes puisse être suivie facilement et que le calcul du résultat fourni puisse être répété de manière indépendante si nécessaire;
- d) donner toutes les corrections et les constantes utilisées pour l'analyse, ainsi que leurs sources.

Un test de la liste précédente consiste à se demander: «ai-je bien fourni assez d'information, d'une manière suffisamment claire, pour que mon résultat puisse être remis à jour ultérieurement si une information ou des données nouvelles devenaient disponibles»?

7.2 Conseils spécifiques

7.2.1 Lorsqu'on exprime le résultat d'un mesurage et que la mesure de l'incertitude est l'incertitude-type composée $u_c(y)$, on doit:

- a) décrire complètement la manière dont le mesurande Y est défini;
- b) donner l'estimation y du mesurande Y et son incertitude-type composée $u_c(y)$; les unités utilisées pour y et $u_c(y)$ doivent toujours être données;
- c) introduire l'incertitude-type composée relative $u_c(y)/|y|$ lorsque cela est approprié (avec la condition $|y| \neq 0$);
- d) donner l'information décrite en [7.2.7](#) ou faire référence à un document publié qui la comporte.

Si cela est jugé utile pour les usagers potentiels du résultat de mesure, par exemple pour aider au calcul ultérieur de facteurs d'élargissement ou pour aider à la compréhension du mesurage, on peut indiquer:

- le nombre effectif de degrés de liberté estimés ν_{eff} (voir [G.4](#));
- les incertitudes-types composées $u_{\text{CA}}(y)$ et $u_{\text{CB}}(y)$ respectivement de Type A et de Type B et leurs nombres effectifs de degrés de liberté estimés ν_{effA} et ν_{effB} (voir [G.4.1](#), Note [3](#)).

7.2.2 Lorsque la mesure de l'incertitude est $u_c(y)$, il est préférable d'énoncer le résultat numérique du mesurage de l'une des quatre manières suivantes pour éviter toute fausse interprétation (on suppose que la grandeur dont on exprime la valeur est un étalon de valeur nominale 100 g de masse m_S ; les mots entre parenthèses peuvent être omis pour plus de concision si u_c est défini par ailleurs dans le document qui exprime le résultat.)

- 1) « $m_S = 100,021\,47$ g avec (une incertitude-type composée) $u_c = 0,35$ mg.»
- 2) « $m_S = 100,021\,47(35)$ g, où le nombre entre parenthèses est la valeur numérique de (l'incertitude-type composée) u_c qui porte sur les deux derniers chiffres correspondants du résultat fourni.»

- 3) « $m_S = 100,021\,47(0,000\,35)$ g, où le nombre entre parenthèses est la valeur numérique de (l'incertitude-type composée) u_c exprimée avec l'unité du résultat fourni.»
- 4) « $m_S = (100,021\,47 \pm 0,000\,35)$ g, où le nombre qui suit le symbole $\pm$ est la valeur numérique de (l'incertitude-type composée) u_c et non un intervalle de confiance.»

NOTE La forme avec $\pm$ doit être évitée à chaque fois que possible parce qu'elle est traditionnellement utilisée pour indiquer un intervalle correspondant à un niveau de confiance élevé et peut en conséquence être confondue avec l'incertitude élargie (voir 7.2.4). De plus, bien que l'objectif de la négation à la fin de 4) soit de prévenir une telle confusion, le fait d'écrire $Y = y \pm u_c(y)$ pourrait encore être mal interprété comme signifiant, surtout si la fin de phrase est omise accidentellement, qu'une incertitude élargie avec $k = 1$ est prévue et que l'intervalle $y - u_c(y) \leq Y \leq y + u_c(y)$ a un niveau de confiance spécifié p , c'est-à-dire celui qui est associé à la loi normale (voir G.1.3). Comme indiqué en 6.3.2 et dans l'Annexe G, cette interprétation $u_c(y)$ est habituellement difficile à justifier.

7.2.3 Lorsqu'on exprime le résultat d'un mesurage et que la mesure de l'incertitude est l'incertitude élargie $U = ku_c(y)$, on doit:

- décrire complètement la manière dont le mesurande Y est défini;
- énoncer le résultat du mesurage sous la forme $Y = y \pm U$ et donner les unités pour y et U ;
- introduire l'incertitude élargie relative $U/|y|$ lorsque cela est approprié (avec la condition $|y| \neq 0$);
- donner la valeur de k utilisée pour obtenir U [ou, pour la commodité de l'utilisateur du résultat, donner la valeur de k et aussi celle de $u_c(y)$];
- donner le niveau de confiance approximatif associé à l'intervalle $y \pm U$ et préciser la manière dont il a été déterminé;
- donner l'information décrite en 7.2.7 ou faire référence à un document publié qui la comporte.

7.2.4 Lorsque la mesure de l'incertitude est U , il est préférable, pour une clarté maximale, d'énoncer le résultat numérique du mesurage comme dans l'exemple suivant. (Les mots entre parenthèses peuvent être omis pour plus de concision si U , u_c , et k sont définis par ailleurs dans le document qui exprime le résultat.)

« $m_S = (100,021\,47 \pm 0,000\,79)$ g, où le nombre qui suit le symbole $\pm$ est la valeur numérique de (l'incertitude élargie) $U = ku_c$, avec U déterminé à partir de (l'incertitude-type composée) $u_c = 0,35$ mg et (du facteur d'élargissement) $k = 2,26$ sur la base de la loi de t pour $\nu = 9$ degrés de liberté, et définit un intervalle estimé avoir un niveau de confiance de 95 pour-cent.»

7.2.5 Si un mesurage détermine simultanément plus d'un mesurande, c'est-à-dire s'il fournit deux ou plusieurs estimations de sortie y_i (voir H.2, H.3, et H.4), il faut alors donner en plus des y_i et $u_c(y_i)$, les éléments $u(y_i, y_j)$ de la matrice de covariance ou les éléments $r(y_i, y_j)$ de la matrice des **coefficients de corrélation** (C.3.6, Note 2) et de préférence les deux.

7.2.6 Les valeurs numériques de l'estimation y et de son incertitude-type $u_c(y)$ ou de son incertitude élargie U ne doivent pas être données avec un nombre excessif de chiffres. Il suffit habituellement de fournir $u_c(y)$ et U [ainsi que les incertitudes-type $u(x_i)$ des estimations d'entrée x_i] avec deux chiffres significatifs au plus bien que, dans certains cas, il puisse être nécessaire de retenir des chiffres supplémentaires pour éviter la propagation des erreurs d'arrondissement dans les calculs ultérieurs.

En énonçant les résultats finals, il peut parfois être approprié d'arrondir les incertitudes au chiffre supérieur plutôt qu'au chiffre le plus proche. Par exemple, $u_c(y) = 10,47$ mΩ pourrait être arrondi à 11 mΩ. Cependant, le bon sens doit prévaloir et une valeur comme $u(x_i) = 28,05$ kHz doit être arrondie à la valeur inférieure, 28 kHz. Les estimations d'entrée et de sortie doivent être arrondies en accord avec leurs incertitudes; par exemple, si $y = 10,057\,62$ Ω avec $u_c(y) = 27$ mΩ, y doit être arrondi à 10,058 Ω. Les coefficients de corrélation doivent être donnés avec trois chiffres significatifs si leurs valeurs absolues sont proches de l'unité.

7.2.7 Dans le rapport détaillé qui décrit le mode d'obtention du résultat d'un mesurage et de son incertitude, on doit suivre les recommandations de [7.1.4](#) et, en conséquence

- a) donner la valeur de chaque estimation d'entrée x_i et de son incertitude-type $u(x_i)$ en décrivant comment elles ont été obtenues;
- b) donner les covariances estimées ou les coefficients de corrélation estimés (de préférence les deux) associés à toutes les estimations d'entrée qui sont corrélées et donner les méthodes utilisées pour les obtenir;
- c) donner les degrés de liberté pour l'incertitude-type de chaque estimation d'entrée et la manière dont ils sont obtenus;
- d) donner la relation fonctionnelle $Y = f(X_1, X_2, \dots, X_N)$ et, lorsqu'elles sont jugées utiles, les dérivées partielles ou les coefficients de sensibilité $\partial f / \partial x_i$. Toutefois, il faut donner tout coefficient de ce type déterminé expérimentalement.

NOTE Parce que la relation fonctionnelle f peut être extrêmement complexe ou peut ne pas exister sous une forme explicite mais seulement comme programme d'ordinateur, il est quelquefois impossible de donner f et ses dérivées. On peut alors décrire la fonction f en termes généraux ou indiquer le programme utilisé à l'aide d'une référence appropriée. Dans ces cas-là, il est important que la manière dont l'estimation y du mesurande Y et son incertitude-type composée $u_c(y)$ ont été obtenues soit claire.

8 Récapitulation de la procédure d'évaluation et d'expression de l'incertitude

Les étapes à suivre pour évaluer et exprimer l'incertitude du résultat d'un mesurage, telles qu'elles sont présentées dans ce *Guide*, peuvent être résumées comme suit:

- 1) Exprimer mathématiquement la relation entre le mesurande Y et les grandeurs d'entrée X_i dont Y dépend: $Y = f(X_1, X_2, \dots, X_N)$. La fonction f doit contenir chaque grandeur, y compris toutes les corrections et facteurs de correction qui peuvent contribuer à une composante significative de l'incertitude du résultat du mesurage (voir [4.1.1](#) et [4.1.2](#)).
- 2) Déterminer x_i , la valeur estimée de la grandeur d'entrée X_i , soit sur la base de l'analyse statistique de séries d'observations, soit par d'autres moyens (voir [4.1.3](#)).
- 3) Évaluer l'incertitude-type $u(x_i)$ de chaque estimation x_i . Pour une estimation d'entrée obtenue par l'analyse statistique de séries d'observations, l'incertitude-type est évaluée comme décrit en [4.2](#) (évaluation de Type A de l'incertitude-type). Pour une estimation d'entrée obtenue par d'autres moyens, l'incertitude-type $u(x_i)$ est évaluée comme décrit en [4.3](#) (évaluation de Type B de l'incertitude-type).
- 4) Évaluer les covariances associées à toutes les estimations d'entrée qui sont corrélées (voir [5.2](#)).
- 5) Calculer le résultat du mesurage, c'est-à-dire l'estimation y du mesurande Y , à partir de la relation fonctionnelle f en utilisant pour les grandeurs d'entrée X_i les estimations x_i obtenues à l'étape 2 (voir [4.1.4](#)).
- 6) Déterminer l'incertitude-type composée $u_c(y)$ du résultat de mesure y à partir des incertitudes-types et des covariances associées aux estimations d'entrée, comme décrit à l'Article [5](#). Si le mesurage détermine simultanément plusieurs grandeurs de sortie, calculer leurs covariances (voir [7.2.5](#), [H.2](#), [H.3](#) et [H.4](#)).
- 7) S'il est nécessaire de donner une incertitude élargie U , avec pour objectif de fournir un intervalle de $y - U$ à $y + U$ dont on peut s'attendre à ce qu'il comprenne une fraction élevée de la distribution des valeurs qui pourraient être attribuées raisonnablement au mesurande Y , multiplier l'incertitude-type composée $u_c(y)$ par un facteur d'élargissement k , typiquement situé dans la plage de 2 à 3, pour obtenir $U = k u_c(y)$. Choisir k sur la base du niveau de confiance requis pour l'intervalle (voir [6.2](#), [6.3](#) et spécialement l'Annexe [G](#) qui présente le choix d'une valeur de k produisant un intervalle avec un niveau de confiance proche d'une valeur spécifiée).

- 8) Donner dans un rapport le résultat du mesurage y avec son incertitude-type composée $u_c(y)$ ou son incertitude élargie U en suivant les indications données en [7.2.1](#) ou [7.2.3](#). Utiliser l'un des modes d'expression recommandés en [7.2.2](#) ou [7.2.4](#). Décrire, comme exposé aussi à l'Article [7](#), comment les valeurs de y et $u_c(y)$ ou U ont été obtenues.

Annexe A

Recommandations du Groupe de travail et du CIPM

A.1 Recommandation INC-1 (1980)

Le Groupe de travail sur l'expression des incertitudes (voir [Avant-propos](#)) s'est réuni en octobre 1980 à l'initiative du Bureau international des poids et mesures (BIPM) en réponse à une demande du Comité international des poids et mesures (CIPM). Il a préparé un rapport détaillé pour prise en considération par le CIPM, rapport qui se conclut par la Recommandation INC-1 (1980) [\[2\]](#). Le texte français, qui fait autorité, déjà donné en [0.7](#) de la présente version française, est reproduit ci-après [\[2\]](#):

Expression des incertitudes expérimentales

Recommandation INC-1 (1980)

- 1) L'incertitude d'un résultat de mesure comprend généralement plusieurs composantes qui peuvent être groupées en deux catégories d'après la méthode utilisée pour estimer leur valeur numérique:
 - i) celles qui sont évaluées à l'aide de méthodes statistiques,
 - ii) celles qui sont évaluées par d'autres moyens.

Il n'y a pas toujours une correspondance simple entre le classement dans les catégories A ou B et le caractère «aléatoire» ou «systématique» utilisé antérieurement pour classer les incertitudes. L'expression «incertitude systématique» est susceptible de conduire à des erreurs d'interprétation; elle doit être évitée.

Toute description détaillée de l'incertitude devrait comprendre une liste complète de ses composantes et indiquer pour chacune la méthode utilisée pour lui attribuer une valeur numérique.

- 2) Les composantes de la catégorie A sont caractérisées par les variances estimées s_i^2 (ou les «écart-types» estimés s_i) et les nombres ν_i de degrés de liberté. Le cas échéant, les covariances estimées doivent être données.
- 3) Les composantes de la catégorie B devraient être caractérisées par des termes u_j^2 qui puissent être considérés comme des approximations des variances correspondantes dont on admet l'existence. Les termes u_j^2 peuvent être traités comme des variances et les termes u_j comme des écarts-types. Le cas échéant, les covariances doivent être traitées de façon analogue.
- 4) L'incertitude composée devrait être caractérisée par la valeur obtenue en appliquant la méthode usuelle de combinaison des variances. L'incertitude composée ainsi que ses composantes devraient être exprimées sous la forme d'«écart-types».
- 5) Si pour des utilisations particulières on est amené à multiplier par un facteur l'incertitude composée afin d'obtenir une incertitude globale, la valeur numérique de ce facteur doit toujours être donnée.

A.2 Recommandation 1 (CI-1981)

Le CIPM a examiné le rapport qui lui avait été soumis par le Groupe de travail sur l'expression des incertitudes et il a adopté la recommandation suivante à sa 70e réunion tenue en octobre 1981 [\[3\]](#):

Recommandation 1 (CI-1981)

Expression des incertitudes expérimentales

Le Comité international des poids et mesures,

considérant

- la nécessité de convenir de modalités uniformes pour exprimer l'incertitude en métrologie,
- les efforts déployés dans ce but par divers organismes depuis de nombreuses années,
- les progrès encourageants vers une solution acceptable qui ont résulté des discussions du Groupe de travail sur l'expression des incertitudes réuni au BIPM en 1980,

reconnait

- que les propositions du Groupe de travail pourraient constituer la base d'un accord éventuel pour l'expression des incertitudes,

recommande

- que les propositions de ce Groupe de travail soient largement portées à la connaissance des intéressés;
- que le BIPM s'efforce d'appliquer les principes contenus dans ces propositions aux comparaisons qu'il organisera dans les années à venir;
- que les autres organismes intéressés étudient et mettent à l'essai ces propositions et fassent connaître au BIPM leurs observations;
- que dans un délai de deux ou trois ans le BIPM fasse le point sur la mise en œuvre de ces propositions.

A.3 Recommandation 1 (CI-1986)

Le CIPM a encore examiné le sujet de l'expression des incertitudes lors de sa 75e réunion tenue en octobre 1986 et il a adopté la recommandation suivante [\[4\]](#):

Recommandation 1 (CI-1986)

Expression des incertitudes dans les travaux effectués sous les auspices du CIPM

Le Comité international des poids et mesures,

considérant la Recommandation INC-1 (1980) adoptée par le Groupe de travail sur l'expression des incertitudes en 1980 et la Recommandation 1 (CI-1981) adoptée par le CIPM en 1981 sur le même sujet,

considérant que certains membres des comités consultatifs peuvent souhaiter des éclaircissements sur ces Recommandations pour les besoins des travaux qui leur incombent, en particulier pour les comparaisons internationales,

prend acte de l'existence d'un groupe de travail de l'Organisation internationale de normalisation (ISO), groupe commun à l'ISO, à l'organisation internationale de métrologie légale et à la Commission électrotechnique internationale, auquel collabore le CIPM et qui traite des applications particulières visées par le paragraphe 5 de la Recommandation INC-1 (1980), et entre autres des applications qui ont une portée commerciale,

demande à tous les participants aux comparaisons internationales et aux autres travaux effectués sous les auspices du CIPM et de ses Comités consultatifs de suivre les directives données au paragraphe 4 de la Recommandation INC-1 (1980) et de donner avec leurs résultats l'incertitude composée résultant des composantes de type A et de type B sous la forme *d'un écart-type*.

Annexe B

Termes métrologiques généraux

B.1 Origine des définitions

Les définitions des termes métrologiques généraux ayant rapport avec ce *Guide* et données ci-après proviennent du *Vocabulaire international des termes généraux et fondamentaux de métrologie* (en abrégé VIM), deuxième édition, 1993* [6], publié par l'Organisation internationale de normalisation (ISO) au nom des sept organisations qui ont apporté leur soutien à sa mise au point et nommé les experts qui l'ont préparé: le Bureau international des poids et mesures (BIPM), la Commission électrotechnique internationale (CEI), la Fédération internationale de chimie clinique (FICC), l'ISO, l'Union internationale de chimie pure et appliquée (IUPAC), l'Union internationale de physique pure et appliquée (IUPAP) et l'Organisation internationale de métrologie légale (OIML). Le VIM doit être la source consultée en priorité pour les définitions de termes qui ne seraient pas inclus ci-après dans cette annexe ou dans le texte du *Guide*.

NOTE Certains termes et concepts statistiques fondamentaux sont donnés en Annexe C, tandis que les termes «valeur vraie», «erreur» et «incertitude» sont développés de manière plus approfondie en Annexe D.

B.2 Définitions

Comme pour l'Article 2, dans les définitions suivantes, l'utilisation de parenthèses autour de mots de certains termes signifie que ces mots peuvent être omis s'il n'y a pas d'ambiguïté à craindre.

Les termes en caractères gras dans certaines notes correspondent à des termes métrologiques complémentaires définis dans ces notes sous forme implicite ou explicite (voir la Référence [6]).

B.2.1

grandeur (mesurable)

attribut d'un phénomène, d'un corps ou d'une substance, qui est susceptible d'être distingué qualitativement et déterminé quantitativement

NOTE 1 Le terme «grandeur» peut se rapporter à une grandeur dans un sens général (voir Exemple 1) ou à une **grandeur particulière** (voir Exemple 2).

EXEMPLE 1 Grandeurs dans un sens général: longueur, temps, masse, température, résistance électrique, concentration en quantité de matière.

EXEMPLE 2 Grandeurs particulières:

- longueur d'une tige donnée
- résistance électrique d'un échantillon donné de fil
- concentration en quantité de matière d'éthanol dans un échantillon donné de vin.

NOTE 2 Les grandeurs qui peuvent être classées les unes par rapport aux autres en ordre croissant (ou décroissant) sont appelées **grandeurs de même nature**.

* Note de bas de page à la version 2008:

La troisième édition du vocabulaire a été publiée en 2008, sous le titre JCGM 200:2008, *Vocabulaire international de métrologie — Concepts fondamentaux et généraux et termes associés (VIM)*.

NOTE 3 Les grandeurs de même nature peuvent être groupées ensemble en **catégories de grandeurs**, par exemple:

- travail, chaleur, énergie
- épaisseur, circonférence, longueur d'onde.

NOTE 4 Des **symboles de grandeurs** sont donnés dans l'ISO 31*.

[VIM:1993, définition 1.1]

B.2.2

valeur (d'une grandeur)

expression quantitative d'une grandeur particulière, généralement sous la forme d'une unité de mesure multipliée par un nombre

EXEMPLE 1 Longueur d'une tige: 5,34 m ou 534 cm.

EXEMPLE 2 Masse d'un corps: 0,152 kg ou 152 g.

EXEMPLE 3 Quantité de matière d'un échantillon d'eau (H₂O): 0,012 mol ou 12 mmol.

NOTE 1 La valeur d'une grandeur peut être positive, négative ou nulle.

NOTE 2 La valeur d'une grandeur peut être exprimée de plus d'une façon.

NOTE 3 Les valeurs des grandeurs de dimension un sont généralement exprimées sous la forme de nombres.

NOTE 4 Certaines grandeurs, pour lesquelles on ne sait pas définir leur rapport à une unité, peuvent être exprimées par référence à une échelle de repérage ou à un procédé de mesure spécifié ou aux deux.

[VIM:1993, définition 1.18]

B.2.3

valeur vraie (d'une grandeur)

valeur compatible avec la définition d'une grandeur particulière donnée

NOTE 1 C'est une valeur que l'on obtiendrait par un mesurage parfait.

NOTE 2 Toute valeur vraie est par nature indéterminée.

NOTE 3 L'article indéfini «une» plutôt que l'article défini «la» est utilisé en conjonction avec «valeur vraie» parce qu'il peut y avoir plusieurs valeurs correspondant à la définition d'une grandeur particulière donnée.

[VIM:1993, définition 1.19]

Commentaire du *Guide*: voir Annexe D, en particulier D.3.5 qui expose la raison pour laquelle le terme «valeur vraie» n'est pas utilisé dans le présent *Guide* et pourquoi les termes «valeur vraie d'un mesurande» (ou d'une grandeur) et «valeur d'un mesurande» (ou d'une grandeur) sont considérés comme équivalents.

B.2.4

valeur conventionnellement vraie (d'une grandeur)

valeur attribuée à une grandeur particulière et reconnue, parfois par convention, comme la représentant avec une incertitude appropriée pour un usage donné

EXEMPLE 1 En un lieu donné, la valeur attribuée à la grandeur réalisée par un étalon de référence peut être prise comme étant une valeur conventionnellement vraie.

* **Note de bas de page à la version 2008:**

L'ISO 31 (toutes les parties) est en cours de révision sous la référence ISO 80000 ou CEI 80000. (Certaines parties ont déjà été publiées.)

EXEMPLE 2 Valeur recommandée par CODATA (1986) pour la constante d'Avogadro, N_A : $6,022\,136\,7 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$.

NOTE 1 La valeur conventionnellement vraie est quelquefois appelée **valeur assignée**, **meilleure estimation** de la valeur, **valeur convenue** ou **valeur de référence**; le terme «valeur de référence», dans ce sens, ne doit pas être confondu avec le même terme utilisé dans le sens de la note dans le VIM:1993, définition 5.7.

NOTE 2 On utilise souvent un grand nombre de résultats de mesures d'une grandeur pour établir une valeur conventionnellement vraie.

[VIM:1993, définition 1.20]

Commentaire du *Guide*: voir le commentaire du *Guide* pour [B.2.3](#).

B.2.5

mesurage

ensemble d'opérations ayant pour but de déterminer une valeur d'une grandeur

NOTE Le déroulement des opérations peut être automatique.

[VIM:1993, définition 2.1]

B.2.6

principe de mesure

base scientifique d'un mesurage

EXEMPLE 1 L'effet thermoélectrique utilisé pour le mesurage de la température.

EXEMPLE 2 L'effet Josephson utilisé pour le mesurage de la tension électrique.

EXEMPLE 3 L'effet Doppler utilisé pour le mesurage de la vitesse.

EXEMPLE 4 L'effet Raman utilisé pour le mesurage du nombre d'onde des vibrations moléculaires.

[VIM:1993, définition 2.3]

B.2.7

méthode de mesure

succession logique des opérations, décrites d'une manière générique, mises en œuvre lors de l'exécution de mesurages

NOTE La méthode de mesure peut être qualifiée de diverses façons telles que:

- méthode de substitution
- méthode différentielle
- méthode de zéro.

[VIM:1993, définition 2.4]

B.2.8

mode opératoire (de mesure)

ensemble des opérations, décrites d'une manière spécifique, mises en œuvre lors de l'exécution de mesurages particuliers selon une méthode donnée

NOTE Le mode opératoire est habituellement décrit dans un document qui est quelquefois appelé lui-même «mode opératoire» et qui donne assez de détails pour qu'un opérateur puisse effectuer un mesurage sans avoir besoin d'autres informations.

[VIM:1993, définition 2.5]

B.2.9

mesurande

grandeur particulière soumise à mesurage

EXEMPLE Pression de vapeur d'un échantillon donné d'eau à 20 °C.

NOTE La définition du mesurande peut nécessiter des indications relatives à des grandeurs telles que le temps, la température et la pression.

[VIM:1993, définition 2.6]

B.2.10

grandeur d'influence

grandeur qui n'est pas le mesurande mais qui a un effet sur le résultat du mesurage

EXEMPLE 1 Température d'un micromètre lors de la mesure d'une longueur.

EXEMPLE 2 Fréquence lors de la mesure de l'amplitude d'une tension électrique alternative.

EXEMPLE 3 Concentration en bilirubine lors de la mesure de la concentration en hémoglobine dans un échantillon de plasma sanguin humain.

[VIM:1993, définition 2.7]

Commentaire du *Guide*: la définition de la grandeur d'influence doit se comprendre comme incluant les valeurs associées aux étalons, aux matériaux de référence, et aux données de référence, valeurs dont peut dépendre le résultat d'un mesurage, aussi bien que les phénomènes tels que les fluctuations à court terme de l'instrument de mesure et les grandeurs telles que la température ambiante, la pression atmosphérique et l'humidité.

B.2.11

résultat d'un mesurage

valeur attribuée à un mesurande, obtenue par mesurage

NOTE 1 Lorsqu'on donne un résultat, on indiquera clairement si l'on se réfère:

- à l'indication
- au résultat brut
- au résultat corrigé

et si cela comporte une moyenne obtenue à partir de plusieurs valeurs.

NOTE 2 Une expression complète du résultat d'un mesurage comprend des informations sur l'incertitude de mesure.

[VIM:1993, définition 3.1]

B.2.12

résultat brut

résultat d'un mesurage avant correction de l'erreur systématique

[VIM:1993, définition 3.3]

B.2.13

résultat corrigé

résultat d'un mesurage après correction de l'erreur systématique

[VIM:1993, définition 3.4]

B.2.14**exactitude de mesure**

étroitesse de l'accord entre le résultat d'un mesurage et une valeur vraie du mesurande

NOTE 1 Le concept d'«exactitude» est qualitatif.

NOTE 2 Le terme «**précision**» ne doit pas être utilisé pour «exactitude».

[VIM:1993, définition 3.5]

Commentaire du *Guide*: voir le commentaire du *Guide* pour [B.2.3](#).

B.2.15**répétabilité (des résultats de mesurage)**

étroitesse de l'accord entre les résultats des mesurages successifs du même mesurande, mesurages effectués dans la totalité des mêmes conditions de mesure

NOTE 1 Ces conditions sont appelées **conditions de répétabilité**.

NOTE 2 Les conditions de répétabilité comprennent:

- même mode opératoire
- même observateur
- même instrument de mesure utilisé dans les mêmes conditions
- même lieu
- répétition durant une courte période de temps.

NOTE 3 La répétabilité peut s'exprimer quantitativement à l'aide des caractéristiques de dispersion des résultats.

[VIM:1993, définition 3.6]

B.2.16**reproductibilité (des résultats de mesurage)**

étroitesse de l'accord entre les résultats des mesurages du même mesurande, mesurages effectués en faisant varier les conditions de mesure

NOTE 1 Pour qu'une expression de la reproductibilité soit valable, il est nécessaire de spécifier les conditions que l'on fait varier.

NOTE 2 Les conditions que l'on fait varier peuvent comprendre:

- principe de mesure
- méthode de mesure
- observateur
- instrument de mesure
- étalon de référence
- lieu
- conditions d'utilisation
- temps.

NOTE 3 La reproductibilité peut s'exprimer quantitativement à l'aide des caractéristiques de dispersion des résultats.

NOTE 4 Les résultats considérés ici sont habituellement les résultats corrigés.

[VIM:1993, définition 3.7]

B.2.17**écart-type expérimental**

pour une série de n mesurages du même mesurande, grandeur $s(q_k)$ caractérisant la dispersion des résultats, donnée par la formule:

$$s(q_k) = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^n (q_j - \bar{q})^2}{n-1}}$$

q_k étant le résultat du k ième mesurage et $\bar{q}$ la moyenne arithmétique des n résultats considérés

NOTE 1 En considérant la série de n valeurs comme échantillon d'une loi de probabilité, $\bar{q}$ est un estimateur sans biais de la moyenne μ_q et $s^2(q_k)$ est un estimateur sans biais de la variance σ^2 de cette loi.

NOTE 2 L'expression $s(q_k)/\sqrt{n}$ est une estimation de l'écart-type de la loi de $\bar{q}$ et est appelée **écart-type expérimental de la moyenne**.

NOTE 3 L'écart-type expérimental de la moyenne est parfois appelé à tort **erreur de la moyenne**.

NOTE 4 Adapté du VIM:1993, définition 3.8.

Commentaire du *Guide*: certains symboles utilisés dans le VIM ont été changés pour être cohérent avec les notations utilisées en [4.2](#) de ce *Guide*.

Commentaire du *Guide* pour la version française: le VIM emploie le terme «distribution» dans les Notes [1](#) et [2](#). En matière de probabilité, le terme «loi» est plus correct.

B.2.18**incertitude (de mesure)**

paramètre, associé au résultat d'un mesurage, qui caractérise la dispersion des valeurs qui pourraient raisonnablement être attribuées au mesurande

NOTE 1 Le paramètre peut être, par exemple, un écart-type (ou un multiple de celui-ci) ou la demi-largeur d'un intervalle de niveau de confiance déterminé.

NOTE 2 L'incertitude de mesure comprend, en général, plusieurs composantes. Certaines peuvent être évaluées à partir de la distribution statistique des résultats de séries de mesurages et peuvent être caractérisées par des écarts-types expérimentaux. Les autres composantes, qui peuvent aussi être caractérisées par des écarts-types, sont évaluées en admettant des lois de probabilité, d'après l'expérience acquise ou d'après d'autres informations.

NOTE 3 Il est entendu que le résultat du mesurage est la meilleure estimation de la valeur du mesurande, et que toutes les composantes de l'incertitude, y compris celles qui proviennent d'effets systématiques, telles que les composantes associées aux corrections et aux étalons de référence, contribuent à la dispersion.

[VIM:1993, définition 3.9]

Commentaire du *Guide*: il est signalé dans le VIM que cette définition et les notes sont identiques à celles de ce *Guide* (voir [2.2.3](#)).

Commentaire du *Guide* pour la version française: en Note [2](#), le VIM emploie le terme «distribution de probabilité». Le terme «loi de probabilité» est plus correct.

B.2.19**erreur (de mesure)**

résultat d'un mesurage moins une valeur vraie du mesurande

NOTE 1 Étant donné qu'une valeur vraie ne peut pas être déterminée, dans la pratique on utilise une valeur conventionnellement vraie [voir VIM:1993, définitions 1.19 ([B.2.3](#)) et 1.20 ([B.2.4](#))].

NOTE 2 Lorsqu'il est nécessaire de faire la distinction entre «l'erreur» et «l'erreur relative», la première est parfois appelée «**erreur absolue de mesure**». Il ne faut pas confondre avec la **valeur absolue de l'erreur**, qui est le module de l'erreur.

[VIM:1993, définition 3.10]

Commentaire du *Guide*: si le résultat d'un mesurage dépend des valeurs de grandeurs autres que le mesurande, les erreurs des valeurs mesurées de ces grandeurs contribuent à l'erreur sur le résultat du mesurage. Voir aussi le commentaire du *Guide* pour [B.2.22](#) et [B.2.3](#).

B.2.20

erreur relative

rapport de l'erreur de mesure à une valeur vraie du mesurande

NOTE Étant donné qu'une valeur vraie ne peut pas être déterminée, dans la pratique on utilise une valeur conventionnellement vraie [voir VIM:1993, définitions 1.19 ([B.2.3](#)) et 1.20 ([B.2.4](#))].

[VIM:1993, définition 3.12]

Commentaire du *Guide*: voir le commentaire du *Guide* pour [B.2.3](#).

B.2.21

erreur aléatoire

résultat d'un mesurage moins la moyenne d'un nombre infini de mesurages du même mesurande, effectués dans les conditions de répétabilité

NOTE 1 L'erreur aléatoire est égale à l'erreur moins l'erreur systématique.

NOTE 2 Comme on ne peut faire qu'un nombre fini de mesurages, il est seulement possible de déterminer une estimation de l'erreur aléatoire.

[VIM:1993, définition 3.13]

Commentaire du *Guide*: voir aussi le commentaire du *Guide* pour [B.2.22](#).

B.2.22

erreur systématique

moyenne qui résulterait d'un nombre infini de mesurages du même mesurande, effectués dans les conditions de répétabilité, moins une valeur vraie du mesurande

NOTE 1 L'erreur systématique est égale à l'erreur moins l'erreur aléatoire.

NOTE 2 Comme la valeur vraie, l'erreur systématique et ses causes ne peuvent pas être connues complètement.

NOTE 3 Pour un instrument de mesure, voir «erreur de justesse» (VIM:1993, définition 5.25).

[VIM:1993, définition 3.14]

Commentaire du *Guide*: l'erreur sur le résultat d'un mesurage (voir [B.2.19](#)) peut souvent être considérée comme provenant d'un certain nombre d'effets systématiques et aléatoires qui contribuent aux composantes individuelles de l'erreur sur le résultat. Voir aussi les commentaires du *Guide* pour [B.2.19](#) et [B.2.3](#).

B.2.23

correction

valeur ajoutée algébriquement au résultat brut d'un mesurage pour compenser une erreur systématique

NOTE 1 La correction est égale à l'opposé de l'erreur systématique estimée.

NOTE 2 Puisque l'erreur systématique ne peut pas être connue parfaitement, la compensation ne peut pas être complète.

[VIM:1993, définition 3.15]

B.2.24

facteur de correction

facteur numérique par lequel on multiplie le résultat brut d'un mesurage pour compenser une erreur systématique

NOTE Puisque l'erreur systématique ne peut pas être connue parfaitement, la compensation ne peut pas être complète.

[VIM:1993, définition 3.16]

Annexe C

Termes et concepts statistiques fondamentaux

C.1 Origine des définitions

Les définitions des termes statistiques fondamentaux donnés dans cette annexe proviennent de la Norme internationale ISO 3534-1:1993* [7]. Cette norme doit être la source consultée en priorité pour les définitions de termes qui ne seraient pas inclus ci-après dans le texte. Certains de ces termes et leurs concepts sous-jacents sont explicités en C.3 à la suite de leur présentation formelle en C.2 pour que l'utilisation du présent *Guide* soit plus facile. Cependant, C.3, qui inclut aussi les définitions de certains termes voisins, n'est pas directement fondé sur l'ISO 3534-1:1993.

C.2 Définitions

Comme à l'Article 2 et en Annexe B, l'utilisation de parenthèses autour de mots de certains termes signifie que ces mots peuvent être omis s'il n'y a pas d'ambiguïté à craindre.

Les termes C.2.1 à C.2.14 sont définis en termes de propriétés de populations. Les définitions des termes C.2.15 à C.2.31 sont relatifs à un ensemble d'observations (voir Référence [7]).

C.2.1

probabilité

nombre réel dans l'intervalle de 0 à 1, associé à un événement aléatoire

NOTE Il peut se rapporter à une fréquence relative d'une occurrence dans une longue série ou à un degré de croyance qu'un événement se produira. Pour un haut degré de croyance, la probabilité est proche de 1.

[ISO 3534-1:1993, définition 1.1]

C.2.2

variable aléatoire

variable pouvant prendre n'importe quelle valeur d'un ensemble déterminé de valeurs, et à laquelle est associée une *loi de probabilité* [ISO 3534-1:1993, définition 1.3 (C.2.3)]

NOTE 1 Une variable aléatoire qui ne peut prendre que des valeurs isolées est dite «discrète». Une variable aléatoire qui peut prendre toutes valeurs à l'intérieur d'un intervalle fini ou infini est dite «continue».

NOTE 2 La probabilité d'un événement A est notée $\Pr(A)$ ou $P(A)$.

[ISO 3534-1:1993, définition 1.2]

Commentaire du *Guide*: le symbole $\Pr(A)$ est utilisé dans ce *Guide* à la place du symbole $P_r(A)$ utilisé dans l'ISO 3534-1:1993.

* **Note de bas de page à la version 2008:**

L'ISO 3534-1:1993 a été annulée et remplacée par l'ISO 3534-1:2006. Il est à noter que certains termes et définitions ont été révisés. Pour plus d'informations, voir la dernière édition.

C.2.3**loi de probabilité** (d'une variable aléatoire)

fonction déterminant la probabilité qu'une variable aléatoire prenne une valeur donnée quelconque ou appartienne à un ensemble donné de valeurs

NOTE La probabilité couvrant l'ensemble des valeurs de la variable est égale à 1.

[ISO 3534-1:1993, définition 1.3]

C.2.4**fonction de répartition**

fonction donnant pour toute valeur x , la probabilité que la variable aléatoire X soit inférieure ou égale à x :

$$F(x) = \Pr(X \leq x)$$

[ISO 3534-1:1993, définition 1.4]

C.2.5**fonction de densité de probabilité** (pour une variable aléatoire continue)

dérivée (lorsqu'elle existe) de la fonction de répartition:

$$f(x) = dF(x)/dx$$

NOTE $f(x)dx$ s'appelle la «probabilité élémentaire»:

$$f(x)dx = \Pr(x < X < x + dx)$$

[ISO 3534-1:1993, définition 1.5]

Commentaire du *Guide* pour la version française: le terme «densité de probabilité», d'usage courant, est utilisé dans le *Guide*.

C.2.6**fonction de masse**

fonction donnant, pour chaque valeur x_i d'une variable aléatoire discrète X , la probabilité p_i que cette variable aléatoire soit égale à x_i :

$$p_i = \Pr(X = x_i)$$

[ISO 3534-1:1993, définition 1.6]

C.2.7**paramètre**

grandeur utilisée pour décrire la loi de probabilité d'une variable aléatoire

[ISO 3534-1:1993, définition 1.12]

C.2.8**corrélation**

liaison entre deux ou plusieurs variables aléatoires à l'intérieur d'une loi

NOTE La plupart des mesures statistiques de corrélation ne mesurent que le degré de liaison linéaire.

[ISO 3534-1:1993, définition 1.13]

C.2.9**espérance mathématique** (d'une variable aléatoire ou d'une loi de probabilité)**valeur espérée****moyenne**

- 1) Pour une variable aléatoire discrète X prenant des valeurs x_i avec des probabilités p_i , l'espérance mathématique, si elle existe, est

$$\mu = E(X) = \sum p_i x_i$$

la somme étant étendue à toutes les valeurs de x_i susceptibles d'être prises par X .

- 2) Pour une variable aléatoire continue X ayant pour fonction de densité de probabilité $f(x)$, l'espérance mathématique, si elle existe, est

$$\mu = E(X) = \int x f(x) dx$$

l'intégrale étant étendue au domaine de variation de X .

[ISO 3534-1:1993, définition 1.18]

C.2.10**variable aléatoire centrée**

variable aléatoire dont l'espérance mathématique est égale à zéro

NOTE Si la variable aléatoire X a pour espérance mathématique μ , la variable aléatoire centrée correspondante est $(X - \mu)$.

[ISO 3534-1:1993, définition 1.21]

C.2.11**variance** (d'une variable aléatoire ou d'une loi de probabilité)espérance mathématique du carré de la *variable aléatoire centrée* [ISO 3534-1:1993, définition 1.21 ([C.2.10](#))]:

$$\sigma^2 = V(X) = E\left\{[X - E(X)]^2\right\}$$

[ISO 3534-1:1993, définition 1.22]

C.2.12**écart-type** (d'une variable aléatoire ou d'une loi de probabilité)

racine carrée positive de la variance:

$$\sigma = \sqrt{V(X)}$$

[ISO 3534-1:1993, définition 1.23]

C.2.13**moment²⁾ centré d'ordre q** dans une loi de probabilité à une variable, espérance mathématique de la q ième puissance de la variable aléatoire centrée $(X - \mu)$:

$$E\left[(X - \mu)^q\right]$$

2) Si, dans la définition des moments, les grandeurs X , $X - a$, Y , $Y - b$, etc., sont remplacées par leurs valeurs absolues, c'est-à-dire $|X|$, $|X - a|$, $|Y|$, $|Y - b|$, etc., on définit d'autres moments appelés «moments absolus».

NOTE Le moment centré d'ordre 2 est la *variance* [ISO 3534-1:1993, définition 1.22 ([C.2.11](#))] de la variable aléatoire X .

[ISO 3534-1:1993, définition 1.28]

C.2.14

loi normale

loi de Laplace-Gauss

loi de probabilité d'une variable aléatoire continue X , dont la densité de probabilité est

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{x-\mu}{\sigma} \right)^2 \right]$$

pour $-\infty < x < +\infty$.

NOTE μ est l'espérance mathématique et σ l'écart-type de la loi normale.

[ISO 3534-1:1993, définition 1.37]

C.2.15

caractère

propriété qui permet d'identifier ou de différencier des individus d'une population donnée

NOTE Le caractère peut être soit quantitatif (par variables), soit qualitatif (par attributs).

[ISO 3534-1:1993, définition 2.2]

C.2.16

population

totalité des individus pris en considération

NOTE Dans le cas d'une variable aléatoire, la *loi de probabilité* [ISO 3534-1:1993, définition 1.3 ([C.2.3](#))] est considérée comme définissant la population de cette variable.

[ISO 3534-1:1993, définition 2.3]

C.2.17

effectif

nombre d'apparitions d'un type donné d'événements ou nombre d'observations appartenant à une classe spécifiée

[ISO 3534-1:1993, définition 2.11]

C.2.18

distribution d'effectif

relation empirique entre les valeurs d'un caractère et leurs effectifs ou leurs fréquences

NOTE La distribution peut être présentée graphiquement sous la forme d'un *histogramme* (ISO 3534-1:1993, définition 2.17), d'un *diagramme en bâtons* (ISO 3534-1:1993, définition 2.18), d'un *polygone d'effectif cumulé* (ISO 3534-1:1993, définition 2.19), ou d'une *table d'effectifs à double entrée* (ISO 3534-1:1993, définition 2.22).

[ISO 3534-1:1993, définition 2.15]

Commentaire du *Guide* pour la version française: le terme «distribution de fréquence», d'usage courant, est utilisé dans le *Guide*.

C.2.19

moyenne arithmétique

moyenne

somme des valeurs divisée par le nombre de valeurs

NOTE 1 Le terme anglais «mean» est utilisé généralement en référence au paramètre d'une population et le terme «average» en référence à un calcul sur des données d'un échantillon.

NOTE 2 La moyenne d'un échantillon aléatoire simple pris dans une population est un estimateur sans biais de la moyenne de cette population. Cependant, d'autres estimateurs, tels que la moyenne géométrique ou harmonique, ou la médiane ou le mode sont parfois utilisés.

[ISO 3534-1:1993, définition 2.26]

C.2.20 variance

mesure de dispersion qui est la somme des carrés des écarts des observations par rapport à leur moyenne divisée par un nombre égal au nombre d'observations moins un

EXEMPLE Pour n observations $x_1, x_2, \dots, x_n$ de moyenne

$$\bar{x} = (1/n) \sum x_i$$

la variance est

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum (x_i - \bar{x})^2$$

NOTE 1 La variance de l'échantillon est un estimateur sans biais de la variance de la population.

NOTE 2 La variance est $n/(n-1)$ fois le moment centré d'ordre 2 (voir note de l'ISO 3534-1:1993, définition 2.39).

[ISO 3534-1:1993, définition 2.33]

Commentaire du *Guide*: la variance définie ici est désignée de manière plus appropriée par «estimation sur échantillon de la variance de la population». La variance d'un échantillon est habituellement définie comme le moment centré d'ordre 2 de l'échantillon (voir [C.2.13](#) et [C.2.22](#)).

C.2.21 écart-type

racine carrée positive de la variance

NOTE L'écart-type de l'échantillon est un estimateur biaisé de l'écart-type de la population.

[ISO 3534-1:1993, définition 2.34]

C.2.22 moment centré d'ordre q

dans la distribution d'un caractère unique, moyenne arithmétique de la q ième puissance de la différence entre les valeurs observées et leur moyenne $\bar{x}$:

$$\frac{1}{n} \sum_i (x_i - \bar{x})^q$$

où n est le nombre d'observations

NOTE Le moment centré d'ordre 1 est égal à zéro.

[ISO 3534-1:1993, définition 2.37]

C.2.23 statistique

fonction de variables aléatoires d'échantillons

NOTE Une statistique, en tant que fonction de variables aléatoires, est également une variable aléatoire et, comme telle, elle admet différentes valeurs selon les échantillons. La valeur de la statistique obtenue en utilisant les résultats d'essais dans cette fonction peut être utilisée dans un test statistique ou comme estimation d'un paramètre d'une population tel que la moyenne ou l'écart-type.

[ISO 3534-1:1993, définition 2.45]

C.2.24

estimation

opération ayant pour but, à partir des résultats d'essais dans un échantillon, d'attribuer des valeurs numériques aux paramètres d'une loi prise comme modèle statistique de la population dont est issu l'échantillon

NOTE Le résultat de cette opération peut être exprimé sous la forme d'une valeur unique, point estimateur [voir l'ISO 3534-1:1993, définition 2.51 ([C.2.26](#))] ou sous la forme d'un intervalle estimateur [voir l'ISO 3534-1:1993, définitions 2.57 ([C.2.27](#)) et 2.58 ([C.2.28](#))].

[ISO 3534-1:1993, définition 2.49]

C.2.25

estimateur

statistique utilisée pour estimer un paramètre d'une population

[ISO 3534-1:1993, définition 2.50]

C.2.26

estimation

valeur d'un estimateur obtenue comme résultat d'une opération d'estimation

[ISO 3534-1:1993, définition 2.51]

C.2.27

intervalle de confiance bilatéral

quand T_1 et T_2 sont deux fonctions des valeurs observées telles que, θ étant un paramètre de population à estimer, la probabilité $\Pr(T_1 \leq \theta \leq T_2)$ soit au moins égale à $(1 - \alpha)$ [où $(1 - \alpha)$ est un nombre fixé, positif et inférieur à 1], l'intervalle entre T_1 et T_2 est un intervalle de confiance bilatéral à $(1 - \alpha)$ pour θ

NOTE 1 Les limites T_1 et T_2 de l'intervalle de confiance sont des *statistiques* [ISO 3534-1:1993, définition 2.45 ([C.2.23](#))] qui, comme telles, auront en général des valeurs différentes d'échantillon en échantillon.

NOTE 2 Dans une longue série d'échantillons, la fréquence des cas où la valeur vraie du paramètre de la population θ est contenue par l'intervalle de confiance, est égale ou supérieure à $(1 - \alpha)$.

[ISO 3534-1:1993, définition 2.57]

C.2.28

intervalle de confiance unilatéral

quand T est une fonction des valeurs observées telle que, θ étant un paramètre de la population à estimer, la probabilité $\Pr(T \geq \theta)$ [ou la probabilité $\Pr(T \leq \theta)$] soit au moins égale à $(1 - \alpha)$ [où $(1 - \alpha)$ est un nombre fixé, positif et inférieur à 1], l'intervalle s'étendant depuis la plus petite valeur de θ jusqu'à T (ou l'intervalle s'étendant de T jusqu'à la plus grande valeur possible de θ) est un intervalle de confiance unilatéral à $(1 - \alpha)$ pour θ

NOTE 1 La limite T de l'intervalle de confiance est une *statistique* [ISO 3534-1:1993, définition 2.45 ([C.2.23](#))] qui, comme telle, aura généralement des valeurs différentes d'échantillon en échantillon.

NOTE 2 Voir Note 2 de l'ISO 3534-1:1993, définition 2.57 ([C.2.27](#)).

[ISO 3534-1:1993, définition 2.58]

C.2.29**niveau de confiance***

valeur $(1 - \alpha)$ de la probabilité associée à un intervalle de confiance ou à un intervalle statistique de dispersion. [Voir l'ISO 3534-1:1993, définitions 2.57 ([C.2.27](#)), 2.58 ([C.2.28](#)) et 2.61 ([C.2.30](#)).]

NOTE $(1 - \alpha)$ est souvent exprimé comme un pourcentage.

[ISO 3534-1:1993, définition 2.59]

Commentaire du *Guide* pour la version française: voir le paragraphe [6.2.2](#) pour la signification de l'astérisque.

C.2.30**intervalle statistique de dispersion**

intervalle pour lequel on peut affirmer, avec un niveau de confiance donné, qu'il contient au moins une proportion également donnée de la population

NOTE 1 Lorsque les deux limites sont définies par des statistiques, l'intervalle est bilatéral. Lorsque l'une des deux limites est infinie ou est constituée par une borne de la variable, l'intervalle est unilatéral.

NOTE 2 Également appelé «intervalle statistique de tolérance». Ce terme ne devrait pas être utilisé car il risque de causer une confusion avec «intervalle de tolérance» qui est défini dans l'ISO 3534-2.

[ISO 3534-1:1993, définition 2.61]

C.2.31**degrés de liberté**

en général, le nombre de termes de la somme moins le nombre de contraintes sur les termes de la somme

[ISO 3534-1:1993, définition 2.85]

C.3 Élaboration de termes et de concepts**C.3.1 Espérance mathématique**

L'espérance mathématique d'une fonction $g(z)$ de la variable aléatoire $p(z)$ qui a la densité de probabilité z est définie par

$$E[g(z)] = \int g(z) p(z) dz$$

avec $\int p(z) dz = 1$ en raison de la définition de $p(z)$. L'espérance mathématique de la variable aléatoire z , notée μ_z , et qui est aussi appelée valeur espérée ou moyenne de z , est donnée par

$$\mu_z \equiv E(z) = \int z p(z) dz$$

Elle est statistiquement estimée par $\bar{z}$, moyenne arithmétique de n observations indépendantes z_i de la variable aléatoire z , qui a pour densité de probabilité $p(z)$:

$$\bar{z} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n z_i$$

C.3.2 Variance

La variance d'une variable aléatoire est l'espérance mathématique de son écart quadratique par rapport à son espérance mathématique. Ainsi, la variance d'une variable aléatoire z de densité de probabilité $p(z)$ est donnée par

$$\sigma^2(z) = \int (z - \mu_z)^2 p(z) dz$$

où μ_z est l'espérance mathématique de z . La variance $\sigma^2(z)$ peut être estimée par

$$s^2(z_i) = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (z_j - \bar{z})^2$$

où

$$\bar{z} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n z_i$$

et où les z_i sont n observations indépendantes de z .

NOTE 1 Le facteur $n - 1$ dans l'expression de $s^2(z_i)$ provient de la corrélation entre z_i et $\bar{z}$ et reflète le fait qu'il y a seulement $n - 1$ éléments indépendants dans l'ensemble $\{z_i - \bar{z}\}$.

NOTE 2 Si l'espérance mathématique μ_z de z est connue, la variance peut être estimée par

$$s^2(z_i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (z_i - \mu_z)^2$$

La variance de la moyenne arithmétique des observations est, bien plus que la variance des observations individuelles, la mesure correcte de l'incertitude d'un résultat de mesure. On doit distinguer soigneusement la variance d'une variable z de la variance de la moyenne $\bar{z}$. La variance de la moyenne arithmétique d'une série de n observations indépendantes z_i de z est donnée par $\sigma^2(\bar{z}) = \sigma^2(z_i)/n$ et elle est estimée par la variance expérimentale de la moyenne

$$s^2(\bar{z}) = \frac{s^2(z_i)}{n} = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (z_i - \bar{z})^2$$

C.3.3 Écart-type

L'écart-type est la racine carrée de la variance. Alors qu'une incertitude-type de Type A est obtenue en prenant la racine carrée de la variance évaluée statistiquement, il est souvent plus commode lorsqu'on évalue une incertitude-type de Type B d'évaluer d'abord un écart-type équivalent obtenu de manière non statistique puis d'obtenir la variance équivalente en élevant l'écart-type au carré.

C.3.4 Covariance

La covariance de deux variables aléatoires est une mesure de leur dépendance mutuelle. La covariance de deux variables aléatoires y et z est définie par

$$\text{cov}(y, z) = \text{cov}(z, y) = E\left\{\left[y - E(y)\right]\left[z - E(z)\right]\right\}$$

qui entraîne

$$\begin{aligned}
\text{cov}(y, z) &= \text{cov}(z, y) \\
&= \iint (y - \mu_y)(z - \mu_z) p(y, z) dy dz \\
&= \iint yz p(y, z) dy dz - \mu_y \mu_z
\end{aligned}$$

où $p(y, z)$ est la densité de probabilité jointe des deux variables y et z . La covariance $\text{cov}(y, z)$ [aussi notée $v(y, z)$] peut être estimée par $s(y_i, z_i)$ obtenue de n paires indépendantes d'observations simultanées y_i et z_i de y et z ,

$$s(y_i, z_i) = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (y_j - \bar{y})(z_j - \bar{z})$$

avec

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i$$

et

$$\bar{z} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n z_i$$

NOTE La covariance estimée de deux moyennes $\bar{y}$ et $\bar{z}$ est donnée par $s(\bar{y}, \bar{z}) = s(y_i, z_i)/n$.

C.3.5 Matrice de covariance

Pour une loi de probabilité à plusieurs variables, la matrice V dont les éléments sont égaux aux variances et covariances des variables est appelée matrice de covariance. Les éléments diagonaux, $v(z, z) \equiv \sigma^2(z)$ ou $s(z_i, z_i) \equiv s^2(z_i)$, sont les variances, tandis que les éléments non diagonaux, $v(y, z)$ ou $s(y_i, z_i)$, sont les covariances.

C.3.6 Coefficient de corrélation

Le coefficient de corrélation est une mesure de la dépendance mutuelle relative de deux variables, égal au rapport de leurs covariances à la racine carrée du produit de leurs variances. Ainsi

$$\rho(y, z) = \rho(z, y) = \frac{v(y, z)}{\sqrt{v(y, y)v(z, z)}} = \frac{v(y, z)}{\sigma(y)\sigma(z)}$$

avec les estimations

$$r(y_i, z_i) = r(z_i, y_i) = \frac{s(y_i, z_i)}{\sqrt{s(y_i, y_i)s(z_i, z_i)}} = \frac{s(y_i, z_i)}{s(y_i)s(z_i)}$$

Le coefficient de corrélation est un nombre tel que $-1 \leq \rho \leq +1$ ou $-1 \leq r(y_i, z_i) \leq +1$.

NOTE 1 Comme ρ et r sont des nombres dans l'intervalle de -1 à $+1$ bornes comprises, alors que les covariances sont habituellement des grandeurs ayant une dimension physique et un ordre de grandeur peu commodes, les coefficients de corrélation sont généralement plus utiles que les covariances.

NOTE 2 Pour des lois de probabilité à plusieurs variables, on donne habituellement la matrice des coefficients de corrélation au lieu de la matrice de covariance. Puisque $\rho(y, y) = 1$ et $r(y_i, y_i) = 1$, les éléments diagonaux de cette matrice sont égaux à 1.

NOTE 3 Si les estimations d'entrée x_i et x_j sont corrélées (voir [5.2.2](#)) et si une variation δ_i de x_i produit une variation δ_j de x_j , le coefficient de corrélation associé à x_i et x_j est alors estimé approximativement par

$$r(x_i, x_j) \approx u(x_i) \delta_j / [u(x_j) \delta_i]$$

Cette relation peut servir de base pour estimer expérimentalement les coefficients de corrélation. Elle peut aussi être utilisée pour calculer la variation approximative d'une estimation d'entrée due à la variation d'une autre estimation d'entrée si l'on connaît leur coefficient de corrélation.

C.3.7 Indépendance

Deux variables aléatoires sont statistiquement indépendantes si leur loi de probabilité jointe est le produit de leurs lois de probabilité individuelles.

NOTE Si deux variables aléatoires sont indépendantes, leur covariance et leur coefficient de corrélation sont nuls mais l'inverse n'est pas nécessairement vrai.

C.3.8 Loi de t ; loi de Student

La loi de t ou loi de Student est la loi de probabilité d'une variable aléatoire continue t dont la densité de probabilité est

$$p(t, \nu) = \frac{1}{\sqrt{\pi\nu}} \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \left(1 + \frac{t^2}{\nu}\right)^{-(\nu+1)/2}, \quad -\infty < t < +\infty$$

où Γ est la fonction gamma et $\nu > 0$. L'espérance mathématique de la loi de t est égale à zéro et sa variance est $\nu/(\nu-2)$ pour $\nu > 2$. Quand $\nu \rightarrow \infty$, la loi de t s'approche d'une loi normale avec $\mu = 0$ et $\sigma = 1$ (voir [C.2.14](#)).

La loi de probabilité de la variable $(\bar{z} - \mu_z)/s(\bar{z})$ est la loi de t si la variable aléatoire z est distribuée normalement avec une espérance mathématique μ_z , où $\bar{z}$ est la moyenne arithmétique de n observations indépendantes z_i de z , $s(z_i)$ est l'écart-type expérimental des n observations, et $s(\bar{z}) = s(z_i)/\sqrt{n}$ est l'écart-type expérimental de la moyenne $\bar{z}$ avec $\nu = n - 1$ degrés de liberté.

Annexe D

Valeur «vraie», erreur et incertitude

Le terme **valeur vraie** (B.2.3) a été traditionnellement utilisé dans les publications sur l'incertitude, mais non dans ce *Guide* pour les raisons présentées dans cette annexe. Parce que les termes «mesurande», «erreur» et «incertitude» sont fréquemment mal interprétés, cette annexe fournit aussi une présentation complémentaire des idées qui les sous-tendent, en complément à la présentation donnée à l'Article 3. Deux illustrent pourquoi le concept d'incertitude adopté dans ce *Guide* est fondé sur le résultat de mesure et son incertitude évaluée plutôt que sur les grandeurs inconnues valeur «vraie» et erreur.

D.1 Le mesurande

D.1.1 Lorsqu'on réalise un mesurage, la première étape consiste à spécifier le mesurande, c'est-à-dire la grandeur à mesurer; le mesurande ne peut pas être spécifié par une valeur mais seulement par la description d'une grandeur. En principe cependant, un mesurande ne pourrait être *complètement* décrit qu'avec une quantité infinie d'information. En conséquence, dans la mesure où cela laisse une certaine latitude d'interprétation, les lacunes de la définition du mesurande introduisent, dans l'incertitude du résultat d'un mesurage, une composante d'incertitude qui peut ou non être significative par rapport à l'exactitude requise pour le mesurage.

D.1.2 La définition d'un mesurande spécifie ordinairement certains états et conditions physiques.

EXEMPLE La célérité du son dans l'air sec de composition (fraction molaire) $N_2 = 0,780\ 8$, $O_2 = 0,209\ 5$, $Ar = 0,009\ 35$ et $CO_2 = 0,000\ 35$ à la température $T = 273,15\ K$ et à la pression $p = 101\ 325\ Pa$.

D.2 La grandeur réalisée

D.2.1 De manière idéale, la grandeur réalisée pour le mesurage devrait être totalement conforme à la définition du mesurande. Il arrive cependant souvent qu'on ne puisse réaliser une telle grandeur et le mesurage est effectué sur une grandeur qui est une approximation du mesurande.

D.3 La valeur «vraie» et la valeur corrigée

D.3.1 Le résultat du mesurage de la grandeur réalisée est corrigé de la différence entre cette grandeur et le mesurande, pour ramener le résultat de mesure à ce qu'il aurait été si la grandeur réalisée avait en fait satisfait complètement à la définition du mesurande. Le résultat du mesurage de la grandeur réalisée est aussi corrigé de tous les autres effets systématiques reconnus comme significatifs. Bien que le résultat final corrigé soit parfois considéré comme la meilleure estimation de la valeur «vraie» du mesurande, le résultat est en réalité simplement la meilleure estimation de la valeur de la grandeur que l'on veut mesurer.

D.3.2 À titre d'exemple, supposons que le mesurande soit l'épaisseur d'une feuille donnée d'un matériau à une température spécifiée. L'éprouvette est portée à une température proche de la température spécifiée et son épaisseur est mesurée à un endroit particulier avec un micromètre. L'épaisseur du matériau, à cet endroit et à cette température, sous la pression exercée par le micromètre, est la grandeur réalisée.

D.3.3 On détermine, au moment de la mesure, la température du matériau et la pression appliquée. On corrige alors le résultat non corrigé du mesurage de la grandeur réalisée en prenant en compte la courbe d'étalonnage du micromètre, l'écart de température de l'éprouvette par rapport à la température spécifiée et la légère compression de l'éprouvette sous la pression appliquée.

D.3.4 Le résultat corrigé peut être appelé meilleure estimation de la valeur «vraie», «vraie» dans le sens où c'est la valeur d'une grandeur censée satisfaire pleinement à la définition du mesurande; mais si le micromètre avait été appliqué à un endroit différent de la feuille de matériau, la grandeur réalisée aurait été différente, avec une valeur «vraie» différente. Cependant, cette valeur «vraie» aurait été compatible avec la définition du mesurande parce que cette dernière ne spécifie pas que l'épaisseur doit être déterminée à un endroit particulier de la feuille. Ainsi, dans ce cas, en raison d'une définition incomplète du mesurande, la valeur «vraie» présente une incertitude qui peut être évaluée à partir de mesurages réalisés en différents emplacements de la feuille. À un niveau donné, tout mesurande possède une telle incertitude «intrinsèque» qui peut être estimée en principe d'une façon ou d'une autre. C'est l'incertitude minimale avec laquelle on peut déterminer un mesurande et chaque mesurage qui atteint une telle incertitude peut être considéré comme le meilleur mesurage possible du mesurande. Pour obtenir une valeur de la grandeur en question avec une incertitude plus petite, il faut que le mesurande soit défini plus complètement.

NOTE 1 Dans l'exemple, la spécification du mesurande laisse dans l'ombre bien d'autres paramètres dont on peut penser qu'ils risquent d'affecter l'épaisseur: la pression atmosphérique, l'humidité, la position de la feuille dans le champ gravitationnel, la manière dont elle est maintenue, etc.

NOTE 2 Bien qu'il faille définir un mesurande suffisamment en détail pour que toute incertitude provenant des lacunes de sa définition soit négligeable par rapport à l'exactitude requise pour le mesurage, on doit reconnaître que cela ne peut pas toujours se faire. La définition peut, par exemple, être incomplète parce qu'elle ne spécifie pas certains paramètres dont les effets ont été supposés à tort négligeables; ou elle peut impliquer des conditions qui ne peuvent jamais être totalement remplies et pour lesquelles il est difficile de prendre en compte les lacunes de la réalisation. Ainsi, pour l'exemple de [D.1.2](#), la célérité du son implique des ondes planes progressives d'amplitude faible, évanescence. Pour autant que le mesurage ne remplisse pas ces conditions, il est nécessaire de prendre en considération la diffraction et les effets non linéaires.

NOTE 3 Une spécification insuffisante du mesurande peut entraîner des divergences entre les résultats de mesurages effectués dans différents laboratoires sur une grandeur qui est censément la même.

D.3.5 Dans ce *Guide*, on évite l'emploi des termes «valeur vraie d'un mesurande», ou «valeur vraie d'une grandeur» (souvent abrégés en «valeur vraie»), parce que le mot «vrai» est considéré comme redondant. «Mesurande» (voir [B.2.9](#)) signifie «grandeur particulière soumise à mesurage», donc «valeur d'un mesurande» signifie «valeur d'une grandeur particulière soumise à mesurage». Puisque «grandeur particulière» se comprend généralement comme signifiant une grandeur, définie ou spécifiée (voir [B.2.1](#), Note 1), l'adjectif «vrai» n'est pas nécessaire dans «valeur vraie d'un mesurande» [ou dans «valeur vraie d'une grandeur», la valeur «vraie» du mesurande (ou de la grandeur) est simplement la valeur du mesurande (ou de la grandeur)]. De plus, comme cela a été indiqué dans la présentation ci-dessus, une valeur «vraie» unique n'est qu'un concept idéalisé.

D.4 Erreur

Un résultat de mesure corrigé n'est pas la valeur du mesurande — en d'autres termes, il est erroné — en raison des imperfections du mesurage de la grandeur réalisée, depuis les variations aléatoires des observations (effets aléatoires), jusqu'à la détermination insuffisante des corrections pour les effets systématiques et à la connaissance incomplète de certains phénomènes physiques (entraînant aussi des effets systématiques). Ni la valeur de la grandeur réalisée ni celle du mesurande ne peuvent jamais être connues exactement; tout ce qu'on peut connaître est leurs valeurs estimées. Dans l'exemple ci-dessus, l'épaisseur mesurée de la feuille *peut* être entachée d'erreur, c'est-à-dire peut différer de la valeur du mesurande (l'épaisseur de la feuille) parce que chacun des points suivants peut se combiner pour contribuer à l'erreur inconnue du résultat de mesure:

- a) petites différences entre les indications du micromètre lorsqu'on l'applique à plusieurs reprises à la même grandeur réalisée;
- b) étalonnage imparfait du micromètre;
- c) mesurage imparfait de la température et de la pression exercée;
- d) connaissance incomplète des effets de la température, de la pression atmosphérique et de l'humidité sur l'éprouvette ou sur le micromètre ou sur les deux.

D.5 Incertitude

D.5.1 Alors que les valeurs exactes des contributions à l'erreur d'un résultat de mesurage ne sont pas connues et ne peuvent pas l'être, les *incertitudes* associées aux effets aléatoires et systématiques responsables de l'erreur peuvent être évaluées. Mais, même si les incertitudes évaluées sont faibles, il n'y a, pour autant, aucune garantie que l'erreur sur le résultat de mesure soit faible, parce que, dans la détermination d'une correction ou dans l'évaluation des lacunes d'une connaissance, on peut aussi négliger un effet systématique qui n'aurait pas été reconnu. Ainsi, l'incertitude du résultat d'un mesurage n'indique pas nécessairement la proximité vraisemblable du résultat de mesure et de la valeur du mesurande; c'est simplement une estimation de la proximité vraisemblable du résultat et de la meilleure valeur, en accord avec les connaissances actuellement disponibles.

D.5.2 L'incertitude de mesure est donc une expression du fait que, pour un mesurande donné et un résultat de mesure donné de ce mesurande, il n'y a pas une valeur, mais un nombre infini de valeurs dispersées autour du résultat, qui sont compatibles avec toutes les observations et les données, avec la connaissance que l'on peut avoir du monde physique et qui peuvent être attribuées au mesurande avec des degrés de crédibilité divers.

D.5.3 Heureusement, dans de nombreuses situations pratiques de mesurages, la majeure partie de la discussion présentée dans cette annexe ne s'applique pas. C'est le cas par exemple lorsque le mesurande est suffisamment bien défini, lorsque les étalons ou les instruments sont étalonnés en utilisant des étalons de référence bien connus, traçables par rapport aux étalons nationaux, et lorsque les incertitudes des corrections d'étalonnage sont négligeables par rapport aux incertitudes dues aux effets aléatoires sur les indications des instruments, ou au nombre limité d'observations (voir [E.4.3](#)). Il n'en reste pas moins qu'une connaissance incomplète des grandeurs d'influence et de leurs effets peut souvent contribuer d'une manière significative à l'incertitude sur le résultat d'un mesurage.

D.6 Représentation graphique

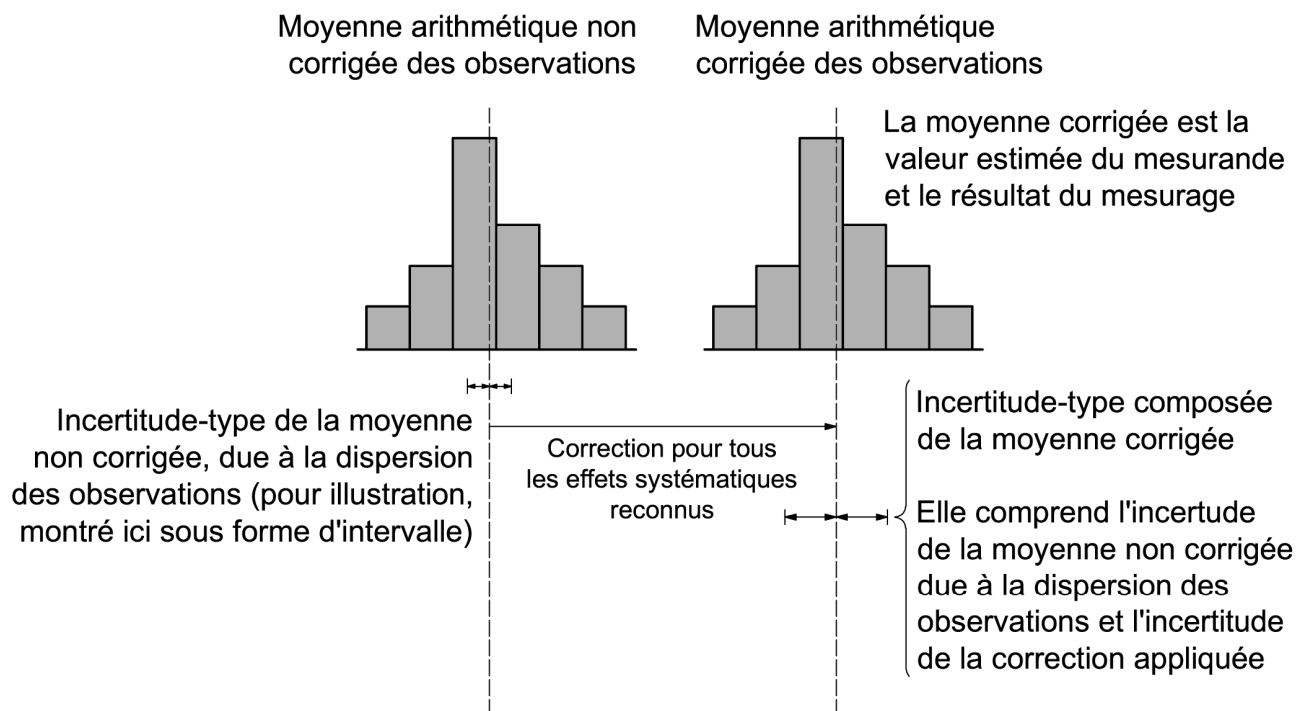
D.6.1 La Figure [D.1](#) décrit certaines des idées présentées à l'Article [3](#) du présent *Guide* et dans cette annexe. Elle illustre pourquoi le présent *Guide* se focalise sur l'incertitude et non sur l'erreur. En général, l'erreur exacte du résultat d'un mesurage n'est pas et ne peut pas être connue. Tout ce qu'on peut faire est d'estimer les valeurs des grandeurs d'entrée, y compris les corrections pour les effets systématiques reconnus, avec leur incertitude-type (écart-type estimé), soit à partir de lois de probabilité inconnues échantillonnées par des observations répétées, soit à partir de lois subjectives ou *a priori* sur la base de l'ensemble des informations disponibles, puis calculer le résultat de mesure à partir des valeurs estimées des grandeurs d'entrée et l'incertitude-type composée de ce résultat à partir des incertitudes-types de ces valeurs estimées. C'est seulement lorsqu'il y a une base solide pour croire que tout cela a été fait correctement, sans oublier aucun effet systématique significatif, que l'on peut supposer que le résultat de mesure est une estimation fiable de la valeur du mesurande et que son incertitude-type composée est une mesure fiable de son erreur *possible*.

NOTE 1 Dans la Figure [D.1 a](#)), les observations sont présentées dans un but d'illustration sous forme d'histogramme [voir [4.4.3](#) et Figure [1 b](#))].

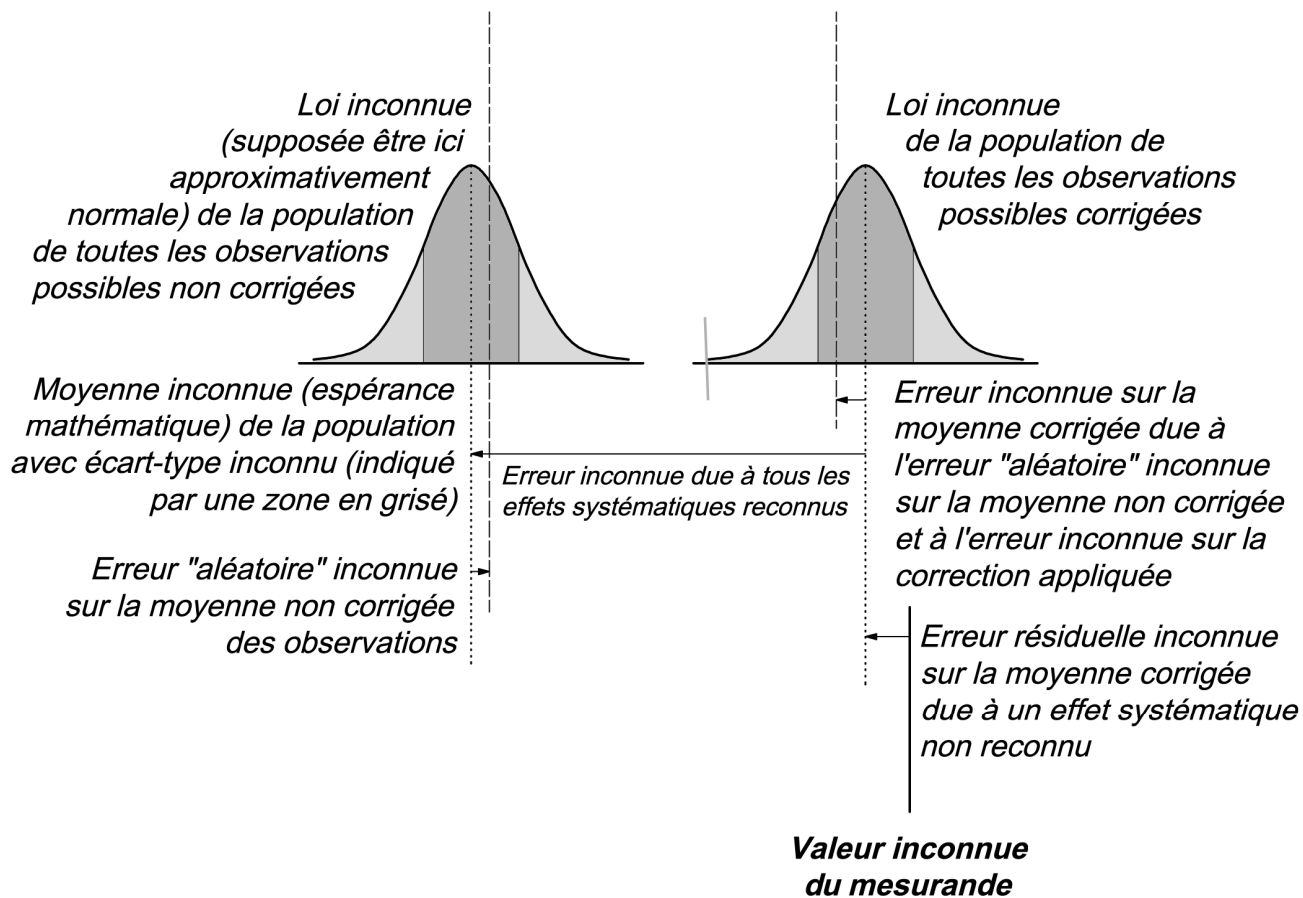
NOTE 2 La correction pour une erreur est égale à l'estimation de l'erreur changée de signe. Ainsi, dans la Figure [D.1](#) aussi bien que dans la Figure [D.2](#), une flèche qui représente la correction pour une erreur a même longueur mais pointe dans la direction opposée à la flèche qui représenterait l'erreur elle-même, et vice-versa. La légende de la figure précise si une flèche donnée représente une correction ou une erreur.

D.6.2 La Figure [D.2](#) décrit certaines des idées déjà présentées dans la Figure [D.1](#), mais d'une autre façon. De plus, elle décrit aussi l'idée qu'il peut y avoir de nombreuses valeurs du mesurande si la définition du mesurande est incomplète [entrée *g*] sur la Figure [D.2](#). L'incertitude provenant de cette définition incomplète, mesurée par la variance, est évaluée par des mesurages de réalisations multiples du mesurande, en utilisant la même méthode, les mêmes instruments, etc. (voir [D.3.4](#)).

NOTE Dans la colonne intitulée «Variance», les variances sont supposées être les variances $u_i^2(y)$ définies dans l'Équation [\(11a\)](#) de [5.1.3](#); c'est pourquoi elles s'additionnent linéairement comme cela est montré sur la figure.



a) Concepts fondés sur des grandeurs observables



b) Concepts idéaux fondés sur des grandeurs qui ne peuvent être connues

Figure D.1 — Illustration graphique de la valeur, de l'erreur et de l'incertitude

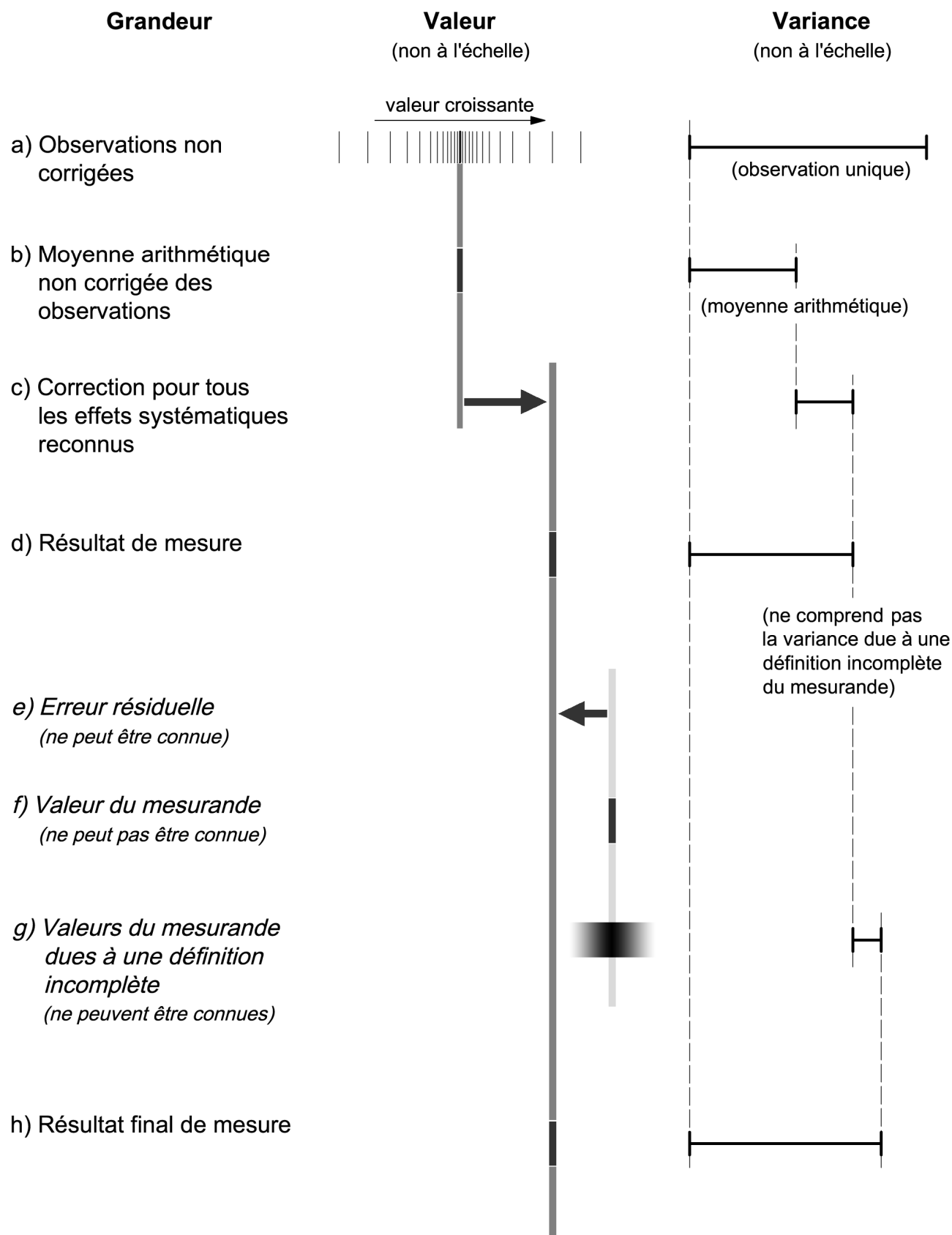


Figure D.2 — Illustration graphique des valeurs, de l'erreur et de l'incertitude

Annexe E

Motivation et fondements de la Recommandation INC-1 (1980)

Cette annexe présente brièvement à la fois la motivation et les fondements statistiques de la Recommandation INC-1 (1980) du Groupe de travail sur l'expression des incertitudes, sur laquelle s'appuie ce *Guide*. Pour plus de détails, voir Références [1, 2, 11, 12].

E.1 «Sûr», «aléatoire» et «systématique»

E.1.1 Ce *Guide* présente une méthode largement applicable pour évaluer et exprimer l'incertitude lors du mesurage. Il fournit une valeur de l'incertitude réaliste plutôt que «sûre», en se fondant sur le concept qu'il n'y a pas de différence de nature entre une composante d'incertitude qui provient d'un effet aléatoire et une autre composante qui provient d'une correction pour un effet systématique (voir 3.2.2 et 3.2.3). La méthode se trouve de ce fait en désaccord avec certaines méthodes plus anciennes qui ont en commun les deux idées suivantes.

E.1.2 La première idée est que l'incertitude déclarée devait être «sûre» ou «conservatoire», ce qui signifie qu'elle ne devait jamais risquer d'être sous-estimée. En fait, parce que l'évaluation de l'incertitude d'un résultat de mesure est problématique, cette idée conduisait souvent à l'élargir délibérément.

E.1.3 La seconde idée est que les influences responsables de l'incertitude pouvaient toujours être reconnues soit «aléatoires», soit «systématiques», ces deux catégories étant de nature différente. Les incertitudes associées à chaque catégorie devaient être composées de la manière qui leur était propre et devaient être exprimées séparément (ou composées d'une certaine manière spécifiée lorsqu'on exigeait un nombre unique). En fait, la méthode de composition des incertitudes était souvent conçue pour satisfaire l'exigence de sûreté.

E.2 Justification pour des évaluations réalistes de l'incertitude

E.2.1 Lorsqu'on rend compte de la valeur d'un mesurande, on doit donner la meilleure estimation de sa valeur et la meilleure évaluation de l'incertitude de cette estimation parce que, si l'incertitude devait s'écarter de sa valeur correcte, il ne serait normalement pas possible de décider de la direction vers laquelle elle devrait s'en écarter d'une manière «sûre». Une sous-évaluation des incertitudes pourrait entraîner un excès de confiance dans les valeurs dont il est question, avec parfois des conséquences gênantes, sinon désastreuses. Une surévaluation délibérée des incertitudes pourrait aussi avoir des répercussions indésirables. Elle pourrait entraîner les utilisateurs d'équipements de mesure à acheter des instruments plus chers que nécessaire ou inciter inutilement à mettre au rebut des produits coûteux ou à rejeter les services d'un laboratoire d'étalonnage.

E.2.2 Cela ne veut pas dire que ceux qui utilisent un résultat de mesure ne puissent pas appliquer leur propre facteur multiplicatif à l'incertitude donnée, pour obtenir une incertitude élargie qui définisse un intervalle ayant un niveau de confiance spécifié et qui satisfasse leurs propres besoins. Cela ne veut pas dire non plus que, dans certaines circonstances, les organismes fournisseurs de résultats de mesure ne puissent pas appliquer couramment un facteur conduisant à une incertitude élargie analogue, pour satisfaire les besoins d'une classe particulière d'utilisateurs de leurs résultats. Cependant, de tels facteurs (qui doivent toujours être donnés) doivent s'appliquer à l'incertitude telle qu'elle est déterminée par une méthode réaliste et seulement après que l'incertitude a été ainsi déterminée, de sorte que l'intervalle défini par l'incertitude élargie ait le niveau de confiance requis et que l'opération puisse être aisément inversée.

E.2.3 Ceux qui s'occupent de mesurage doivent souvent incorporer à leurs analyses les résultats de mesurages effectués par d'autres personnes, chacun de ces autres résultats ayant sa propre incertitude. En évaluant l'incertitude de leur propre résultat de mesure, ils ont besoin de la meilleure valeur, non d'une valeur

«sûre» de l'incertitude pour chaque résultat incorporé provenant d'une autre origine. Pour donner l'incertitude de leur propre résultat, il leur faut de plus pouvoir composer d'une manière logique et simple ces incertitudes importées avec les incertitudes de leurs propres observations. La Recommandation INC-1 (1980) fournit ce moyen.

E.3 Justification pour le traitement identique de toutes les composantes de l'incertitude

Le but de ce paragraphe est d'illustrer par un exemple simple comment ce *Guide* traite exactement de la même façon les composantes de l'incertitude provenant d'effets aléatoires et celles provenant des corrections estimées d'effets systématiques, lorsqu'on évalue l'incertitude du résultat d'un mesurage. C'est ainsi qu'il sert d'exemple au point de vue adopté dans ce *Guide* et cité en [E.1.1](#), c'est-à-dire que toutes les composantes de l'incertitude sont de même nature et doivent être traitées de manière identique. Le point de départ de la présentation est une démonstration simplifiée de l'expression mathématique pour la propagation des écarts-types, appelée dans ce *Guide* loi de propagation de l'incertitude.

E.3.1 Supposons que la grandeur de sortie $z = f(w_1, w_2, \dots, w_N)$ dépende de N grandeurs d'entrée $w_1, w_2, \dots, w_N$, où chaque w_i est décrit par une loi de probabilité convenable. Le développement de f autour des espérances mathématiques des w_i , $E(w_i) \equiv \mu_i$, en série de Taylor du premier ordre donne, pour les petites variations de z autour de μ_z en fonction des petites variations de w_i autour de μ_i ,

$$z - \mu_z = \sum_{i=1}^N \frac{\partial f}{\partial w_i} (w_i - \mu_i) \quad (\text{E.1})$$

où tous les termes de degré plus élevé sont supposés être négligeables et avec $\mu_z = f(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_N)$. Le carré de la différence $z - \mu_z$ est alors donné par

$$(z - \mu_z)^2 = \left(\sum_{i=1}^N \frac{\partial f}{\partial w_i} (w_i - \mu_i) \right)^2 \quad (\text{E.2a})$$

qui peut être écrit sous la forme

$$(z - \mu_z)^2 = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial f}{\partial w_i} \right)^2 (w_i - \mu_i)^2 + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \frac{\partial f}{\partial w_i} \frac{\partial f}{\partial w_j} (w_i - \mu_i) (w_j - \mu_j) \quad (\text{E.2b})$$

L'espérance mathématique du carré de la différence $(z - \mu_z)^2$ est la variance de z , soit $E[(z - \mu_z)^2] = \sigma_z^2$, et alors l'Équation [\(E.2b\)](#) conduit à

$$\sigma_z^2 = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial f}{\partial w_i} \right)^2 \sigma_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \frac{\partial f}{\partial w_i} \frac{\partial f}{\partial w_j} \sigma_i \sigma_j \rho_{ij} \quad (\text{E.3})$$

Dans cette expression, $\sigma_i^2 = E[(w_i - \mu_i)^2]$ est la variance de w_i et $\rho_{ij} = v(w_i, w_j) / (\sigma_i^2 \sigma_j^2)^{1/2}$ est le coefficient de corrélation de w_i et w_j , où $v(w_i, w_j) = E[(w_i - \mu_i)(w_j - \mu_j)]$ est la covariance de w_i et w_j .

NOTE 1 σ_z^2 et σ_i^2 sont respectivement les moments centrés d'ordre 2 (voir [C.2.13](#) et [C.2.22](#)) des lois de probabilité de z et de w_i . Une loi de probabilité peut être complètement déterminée par son espérance mathématique, sa variance et ses moments centrés d'ordre plus élevé.

NOTE 2 L'Équation [\(13\)](#) de [5.2.2](#) [de même que l'Équation [\(15\)](#)] utilisée pour calculer l'incertitude-type composée est identique à l'Équation [\(E.3\)](#) à part le fait que l'Équation [\(13\)](#) est exprimée en termes d'estimations de variances, d'écarts-types et de coefficients de corrélation.

E.3.2 Dans la terminologie traditionnelle, l'Équation (E.3) est souvent appelée «loi générale de propagation des erreurs», appellation qui s'applique mieux à une expression de la forme $\Delta z = \sum_{i=1}^N (\partial f / \partial w_i) \Delta w_i$, où Δz est la variation de z due à de (petites) variations de Δw_i [voir Équation (E.8)]. Comme on l'a fait dans ce *Guide*, le fait d'appeler l'Équation (E.3) loi de propagation de l'incertitude est approprié parce que cette équation montre comment se composent les incertitudes des grandeurs d'entrée w_i , prises égales aux écarts-types des lois de probabilité des w_i , pour donner l'incertitude de la grandeur de sortie z si cette incertitude est prise égale à l'écart-type de la loi de probabilité de z .

E.3.3 L'Équation (E.3) s'applique aussi à la propagation de multiples des écarts-types parce que si l'on remplace chaque écart-type σ_i par un multiple $k\sigma_i$, avec le même k pour chaque σ_i , l'écart-type de la grandeur de sortie z est remplacé par $k\sigma_z$. Elle ne s'applique pas, cependant, à la propagation des intervalles de confiance. Si chaque σ_i est remplacé par une grandeur δ_i qui définit un intervalle correspondant à un niveau de confiance donné p , la grandeur résultante pour z , δ_z , ne définira pas un intervalle correspondant à la même valeur de p sauf si tous les w_i suivent des lois normales. L'Équation (E.3) n'implique aucune hypothèse sur la normalité des lois de probabilité des grandeurs w_i . Plus spécifiquement, si, dans l'Équation (10) de 5.1.2, chaque incertitude-type $u(x_i)$ est évaluée à partir d'observations répétées indépendantes et multipliée par le facteur t correspondant à son nombre de degrés de liberté pour une valeur particulière de p (disons $p = 95$ pour-cent), l'incertitude de l'estimation y ne définira pas un intervalle correspondant à cette valeur de p (voir G.3 et G.4).

NOTE L'exigence de normalité pour la propagation des intervalles de confiance en utilisant l'Équation (E.3) peut être l'une des raisons de la séparation historique des composantes de l'incertitude déduites d'observations répétées, supposées être normalement distribuées, de celles qui étaient évaluées simplement par des limites supérieure et inférieure.

E.3.4 Considérons l'exemple suivant: z dépend seulement d'une grandeur d'entrée w , $z = f(w)$, où w est estimé par la moyenne des n valeurs w_k des w ; ces n valeurs sont obtenues à partir de n observations répétées indépendantes q_k d'une variable aléatoire q ; et w_k et q_k sont reliés par

$$w_k = \alpha + \beta q_k \quad (\text{E.4})$$

Dans cette équation, α représente un décalage ou une dérive «systématique», constant, commun à chaque observation et β est un facteur d'échelle commun. Le décalage et le facteur d'échelle, bien que fixés au cours des observations, sont supposés être caractérisés par des lois de probabilité a priori, où α et β sont les meilleures estimations des espérances mathématiques de ces lois.

La meilleure estimation de w est la moyenne arithmétique $\bar{w}$ obtenue de

$$\bar{w} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n w_k = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (\alpha + \beta q_k) \quad (\text{E.5})$$

La grandeur z est alors estimée par $f(\bar{w}) = f(\alpha, \beta, q_1, q_2, \dots, q_n)$ et l'estimation $u^2(z)$ de sa variance $\sigma^2(z)$ est obtenue à partir de l'Équation (E.3). Si l'on suppose par simplicité que $z = w$ de sorte que la meilleure estimation de z soit $z = f(\bar{w}) = \bar{w}$, alors l'estimation $u^2(z)$ peut être trouvée facilement. En remarquant à partir de l'Équation (E.5) que

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha} = 1,$$

$$\frac{\partial f}{\partial \beta} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n q_k = \bar{q},$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial q_k} = \frac{\beta}{n},$$

en appelant respectivement $u^2(\alpha)$ et $u^2(\beta)$ les variances estimées de α et de β et en supposant que les observations individuelles ne sont pas corrélées, on trouve, à partir de l'Équation (E.3)

$$u^2(z) = u^2(\alpha) + \bar{q}^2 u^2(\beta) + \beta^2 \frac{s^2(q_k)}{n} \quad (\text{E.6})$$

où $s^2(q_k)$ est la variance expérimentale des observations q_k calculée selon l'Équation (4) de 4.2.2, et où $s^2(q_k)/n = s^2(\bar{q})$ est la variance expérimentale de la moyenne $\bar{q}$ [Équation (5) de 4.2.3].

E.3.5 Dans la terminologie traditionnelle, le troisième terme du membre de droite de l'Équation (E.6) est appelé contribution «aléatoire» à la variance estimée $u^2(z)$ parce qu'il décroît normalement lorsque le nombre d'observations n augmente, tandis que les deux premiers termes sont appelés contributions «systématiques» parce qu'ils ne dépendent pas de n .

De façon plus significative, pour certains traitements traditionnels de l'incertitude de mesure, l'Équation (E.6) serait contestable parce que l'on n'y fait pas de distinction entre les incertitudes provenant d'effets systématiques et celles provenant d'effets aléatoires. En particulier, la composition de variances obtenues à partir de lois de probabilité a priori avec celles obtenues à partir de distributions de fréquence est déconseillée parce que le concept de probabilité est considéré comme s'appliquant *seulement* aux événements qui peuvent être répétés un grand nombre de fois, essentiellement dans les mêmes conditions, la probabilité p d'un événement ($0 \leq p \leq 1$) indiquant la *fréquence* avec laquelle se produit l'événement.

Par contraste avec ce point de vue de la probabilité fondée sur la fréquence, un autre point de vue aussi valable est que la probabilité est une mesure du *degré de croyance* en ce qu'un événement se produise [13, 14]. Par exemple, supposons que l'on ait une chance de gagner une petite somme d'argent D et que l'on soit un parieur rationnel. Notre degré de croyance dans l'apparition de l'événement A est $p = 0,5$ si nous sommes indifférents à ces deux choix de pari:

- 1) recevoir D si l'événement A se produit mais rien s'il ne se produit pas;
- 2) recevoir D si l'événement A ne se produit pas mais rien s'il se produit.

La Recommandation INC-1 (1980) sur laquelle est fondé ce *Guide* adopte implicitement une telle approche de la probabilité puisqu'elle considère les expressions telles que l'Équation (E.6) comme le moyen convenable de calculer l'incertitude-type composée du résultat d'un mesurage.

E.3.6 En adoptant une interprétation de la probabilité fondée sur le degré de croyance, l'écart-type (incertitude-type) et la loi de propagation de l'incertitude [Équation (E.3)] comme bases pour l'évaluation et l'expression de l'incertitude de mesure, comme cela a été fait dans ce *Guide*, on bénéficie de trois avantages distincts:

- a) la loi de propagation de l'incertitude permet l'incorporation aisée de l'incertitude-type composée d'un résultat unique dans l'évaluation de l'incertitude-type composée d'un autre résultat pour lequel le premier est utilisé;
- b) l'incertitude-type composée peut servir de base pour le calcul d'intervalles qui correspondent de façon réaliste à leurs niveaux de confiance exigés; et
- c) il n'est pas nécessaire de classer les composantes en «aléatoires» ou «systématiques» (ou de toute autre manière) lorsqu'on évalue l'incertitude parce que toutes les composantes de l'incertitude sont traitées de la même façon.

L'avantage c) est particulièrement appréciable parce qu'un tel classement est souvent source de confusion; une composante d'incertitude n'est ni «aléatoire», ni «systématique». Sa nature est conditionnée par l'usage qui est fait de la grandeur correspondante, ou, plus formellement, par le contexte dans lequel apparaît la grandeur dans le modèle mathématique qui décrit le mesurage. En conséquence, lorsque la grandeur correspondante est utilisée dans un contexte différent, une composante «aléatoire» peut devenir une composante «systématique» et vice-versa.

E.3.7 Pour la raison donnée en [c\)](#) ci-dessus, la Recommandation INC-1 (1980) ne classe pas les composantes de l'incertitude en «aléatoires» ou «systématiques». En fait, pour autant que le calcul de l'incertitude-type composée d'un résultat de mesure soit concerné, il n'est pas nécessaire de classer les composantes de l'incertitude; il n'y a donc aucun besoin réel pour quelque schéma de classement que ce soit. Cependant, parce qu'il est parfois commode de disposer de catégories convenables dans la communication et la présentation des idées, la Recommandation INC-1 (1980) fournit un schéma de classification des deux *méthodes* distinctes par lesquelles on peut évaluer les composantes de l'incertitude, soit «A» et «B» (voir [0.7](#), [2.3.2](#) et [2.3.3](#)).

Le fait de classer les méthodes utilisées pour évaluer les composantes de l'incertitude évite le principal problème associé à la classification des composantes elles-mêmes, c'est-à-dire la dépendance de la classification d'une composante par rapport à la manière dont la grandeur correspondante est utilisée. De plus, la classification des méthodes plutôt que des composantes n'exclut pas le rassemblement des composantes individuelles évaluées par les deux méthodes en groupes spécifiques pour un usage particulier dans un mesurage donné, par exemple lorsqu'on compare la variabilité observée expérimentalement à celle prévue théoriquement pour les valeurs de sortie d'un système de mesure complexe (voir [3.4.3](#)).

E.4 Écart-type comme mesure de l'incertitude

E.4.1 L'Équation [\(E.3\)](#) exige que l'incertitude de l'estimation d'une grandeur d'entrée soit évaluée sous forme d'incertitude-type, c'est-à-dire sous forme d'écart-type estimé, quelle que soit la manière dont elle est obtenue. Si, au lieu de cela, on évalue une quelconque alternative considérée comme plus sûre, celle-ci ne peut être utilisée dans l'Équation [\(E.3\)](#). En particulier, si la «limite d'erreur maximale» (le plus grand écart concevable par rapport à la meilleure estimation supposée) est utilisée dans l'Équation [\(E.3\)](#), l'incertitude résultante aura une signification mal définie et sera inutilisable par quiconque voudra l'introduire dans des calculs ultérieurs d'incertitudes pour d'autres grandeurs (voir [E.3.3](#)).

E.4.2 Lorsque l'incertitude-type d'une grandeur d'entrée ne peut pas être évaluée par l'analyse des résultats d'un nombre convenable d'observations répétées, on doit adopter une loi de probabilité fondée sur une connaissance beaucoup plus restreinte que ce qu'on pourrait souhaiter. Cependant, cela ne rend pas la loi sans validité ni sans réalité. Comme toutes les lois de probabilité, elle exprime la connaissance disponible.

E.4.3 Les évaluations fondées sur des observations répétées ne sont pas nécessairement supérieures à celles qui sont obtenues par d'autres moyens. Considérons $s(\bar{q})$, écart-type expérimental de la moyenne de n observations indépendantes q_k d'une variable aléatoire q distribuée normalement [voir Équation [\(5\)](#) de [4.2.3](#)]. La grandeur $s(\bar{q})$ est une statistique (voir [C.2.23](#)) qui estime $\sigma(\bar{q})$, écart-type de la loi de probabilité de $\bar{q}$, c'est-à-dire l'écart-type de la loi des valeurs de $\bar{q}$ qui seraient obtenues si le mesurage était répété un nombre infini de fois. La variance $\sigma^2[s(\bar{q})]$ de $s(\bar{q})$ est donnée approximativement par

$$\sigma^2[s(\bar{q})] \approx \sigma^2(\bar{q})/(2\nu) \quad (\text{E.7})$$

où $\nu = n - 1$ est le nombre de degrés de liberté de $s(\bar{q})$ (voir [G.3.3](#)). Alors, l'écart-type relatif de $s(\bar{q})$, qui est donné par le rapport $\sigma[s(\bar{q})]/\sigma(\bar{q})$ et qui peut être considéré comme une mesure de l'incertitude relative de $s(\bar{q})$, est approximativement égal à $[2(n - 1)]^{-1/2}$. Cette «incertitude de l'incertitude» de $\bar{q}$, qui résulte pour des raisons purement statistiques de l'effectif limité de l'échantillon, peut être étonnamment grande; pour $n = 10$ observations, elle est égale à 24 pour-cent. Le Tableau [E.1](#) donne cette valeur et quelques autres et elle montre que l'écart-type d'un écart-type estimé statistiquement n'est pas négligeable pour les valeurs pratiques de n . En conséquence, on peut conclure que les évaluations de Type A de l'incertitude-type ne sont pas nécessairement plus fiables que les évaluations de Type B et que, dans de nombreuses situations pratiques de mesure où le nombre d'observations est limité, les composantes obtenues par des évaluations de Type B peuvent être mieux connues que les composantes obtenues à partir d'évaluations de Type A.

Tableau E.1 — $\sigma[s(\bar{q})]/\sigma(\bar{q})$, écart-type relatif de l'écart-type expérimental de la moyenne $\bar{q}$ de n observations indépendantes d'une variable aléatoire q , distribuée selon une loi normale, par rapport à l'écart-type de cette moyenne [\(a\)](#) [\(b\)](#)

Nombre d'observations n	$\sigma[s(\bar{q})]/\sigma(\bar{q})$ (pourcentage)
2	76
3	52
4	42
5	36
10	24
20	16
30	13
50	10

(a) Les valeurs données ont été calculées à partir de l'expression exacte de $\sigma[s(\bar{q})]/\sigma(\bar{q})$, et non à partir de l'expression approchée $[2(n-1)]^{-1/2}$.

(b) Dans l'expression $\sigma[s(\bar{q})]/\sigma(\bar{q})$, le dénominateur $\sigma(\bar{q})$ est l'espérance mathématique $E[S/\sqrt{n}]$ et le numérateur $\sigma[s(\bar{q})]$ est la racine carrée de la variance $V[S/\sqrt{n}]$, où S est une variable aléatoire égale à l'écart-type de n variables aléatoires indépendantes $X_1, \dots, X_n$ ayant chacune une distribution normale de valeur moyenne μ et de variance σ^2 :

$$S = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}, \quad \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

L'espérance mathématique et la variance de S sont données par:

$$E[S] = \sqrt{\frac{2}{n-1}} \frac{\Gamma(n/2)}{\Gamma[(n-1)/2]} \sigma, \quad V[S] = \sigma^2 - E[S]^2,$$

où $\Gamma(x)$ est la fonction gamma. Noter que $E[S] < \sigma$ pour un nombre fini n .

E.4.4 Alors que les incertitudes associées à l'application d'une méthode de mesure particulière sont des paramètres statistiques caractérisant des variables aléatoires, on a prétendu qu'il existe des cas d'«effet systématique véritable» pour lesquels l'incertitude doit être traitée différemment. On peut donner en exemple un biais de valeur fixe inconnue qui serait le même pour toutes les déterminations par une même méthode, décalage dû à une imperfection possible dans le principe même de la méthode ou dans une de ses hypothèses sous-jacentes. Mais si l'on constate la possibilité d'existence d'un tel biais et si sa valeur est supposée pouvoir être significative, il peut alors être décrit par une loi de probabilité, même si elle est bâtie simplement, fondée sur la connaissance qui a permis d'arriver à la conclusion que le biais pourrait exister et être significatif. Ainsi, si l'on considère la probabilité comme étant une mesure du degré de confiance qu'un événement se produise, la contribution d'un tel effet systématique peut être incluse dans l'incertitude-type composée d'un résultat de mesure en l'évaluant comme une incertitude-type d'une loi de probabilité a priori et en le traitant de la même manière que toute autre incertitude-type d'une grandeur d'entrée.

EXEMPLE La spécification d'un mode opératoire particulier nécessite qu'une certaine grandeur d'entrée soit calculée à partir d'un développement en série de puissances spécifiques dont les termes de plus haut degré ne sont pas connus exactement. L'effet systématique dû au fait de ne pas pouvoir traiter exactement ces termes entraîne un biais fixe inconnu qui ne peut être échantillonné par répétition du mode opératoire. En conséquence, l'incertitude associée à l'effet ne peut être évaluée et incluse dans l'incertitude du résultat de mesure final si l'on suit strictement une interprétation de la probabilité fondée sur la fréquence. De plus, l'interprétation de la probabilité sur la base du degré de croyance permet à l'incertitude caractérisant l'effet d'être évaluée à partir d'une loi de probabilité a priori (dédue de la connaissance disponible concernant les termes connus de manière inexacte) et de l'inclure dans le calcul de l'incertitude-type composée du résultat de mesure comme toute autre incertitude.

E.5 Une comparaison entre les deux points de vue sur l'incertitude

E.5.1 Le point focal de ce *Guide* concerne le résultat de mesure et son incertitude évaluée, plus que les grandeurs inconnues valeur «vraie» et erreur (voir Annexe D). En adoptant le point de vue opérationnel que le résultat d'un mesurage est simplement la valeur à attribuer au mesurande et que l'incertitude de ce résultat est une mesure de la dispersion des valeurs qui pourraient être raisonnablement attribuées au mesurande, ce *Guide* rompt en fait la liaison souvent déroutante entre l'incertitude et les grandeurs inconnues valeur «vraie» et erreur.

E.5.2 Cette liaison peut être comprise en interprétant la démonstration de l'Équation (E.3), la loi de propagation de l'incertitude, du point de vue de la valeur «vraie» et de l'erreur. Dans ce cas, μ_i est considéré comme la valeur «vraie» unique, inconnue, de la grandeur d'entrée w_i et chaque w_i est supposé être relié à sa valeur «vraie» μ_i par $w_i = \mu_i + \varepsilon_i$, où ε_i est l'erreur sur w_i . L'espérance mathématique de la loi de probabilité de chaque ε_i est supposée être égale à zéro, $E(\varepsilon_i) = 0$, avec la variance $E(\varepsilon_i^2) = \sigma_i^2$. L'Équation (E.1) devient alors

$$\varepsilon_z = \sum_{i=1}^N \frac{\partial f}{\partial w_i} \varepsilon_i \quad (\text{E.8})$$

où $\varepsilon_z = z - \mu_z$ est l'erreur sur z et μ_z est la valeur «vraie» de z . Si l'on prend alors l'espérance mathématique du carré de ε_z , on obtient une équation formellement identique à l'Équation (E.3) mais où $\sigma_z^2 = E(\varepsilon_z^2)$ est la variance de ε_z et $\rho_{ij} = v(\varepsilon_i, \varepsilon_j) / (\sigma_i^2 \sigma_j^2)^{1/2}$ est le coefficient de corrélation de ε_i et ε_j , où $v(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = E(\varepsilon_i \varepsilon_j)$ est la covariance de ε_i et ε_j . Les variances et les covariances sont alors associées aux *erreurs* sur les grandeurs d'entrée plutôt qu'aux grandeurs d'entrée elles-mêmes.

NOTE On suppose que la probabilité est considérée comme une mesure du degré de croyance de l'apparition d'un événement, ce qui implique qu'une erreur systématique puisse être traitée de la même façon qu'une erreur aléatoire et que ε_i représente l'une ou l'autre.

E.5.3 En pratique, la différence de point de vue ne conduit pas à une différence sur la valeur numérique du résultat de mesure ou sur l'incertitude affectée à ce résultat.

Tout d'abord, dans les deux cas, les meilleures estimations disponibles des grandeurs d'entrée w_i sont utilisées pour obtenir la meilleure estimation z à partir de la fonction f ; cela n'entraîne pas de différence *dans les calculs* selon que les meilleures estimations sont considérées comme les valeurs les plus vraisemblables à attribuer aux grandeurs en question ou comme les meilleures estimations de leurs valeurs «vraies».

Ensuite, parce que $\varepsilon_i = w_i - \mu_i$, et parce que les μ_i représentent des valeurs fixées, uniques, et, en conséquence sans incertitude, les variances et écarts-types des ε_i et des w_i sont identiques. Cela signifie que, dans les deux cas, les incertitudes-types utilisées comme estimations des écarts-types σ_i pour obtenir l'incertitude-type composée du résultat de mesure sont identiques et donneront la même valeur numérique pour cette incertitude. Encore une fois, cela n'entraîne pas de différence *dans les calculs* selon qu'une incertitude-type est considérée comme une mesure de la dispersion de la loi de probabilité d'une grandeur d'entrée ou comme une mesure de la dispersion de la loi de probabilité de l'erreur sur cette grandeur.

NOTE Si l'hypothèse de la *Note* de E.5.2 n'avait pas été faite, les développements de ce paragraphe ne s'appliqueraient que si toutes les estimations des grandeurs d'entrée et les incertitudes de ces estimations étaient obtenues à partir de l'analyse statistique d'observations répétées, c'est-à-dire d'évaluations de Type A.

E.5.4 Bien que l'approche fondée sur la valeur «vraie» et l'erreur fournisse les mêmes résultats numériques que l'approche suivie dans ce *Guide* (sous réserve que l'hypothèse de la *Note* de E.5.2 soit faite), le concept d'incertitude développé dans ce *Guide* élimine la confusion entre erreur et incertitude (voir Annexe D). À vrai dire, l'approche opérationnelle du présent *Guide*, où l'accent est mis sur la valeur observée (ou estimée) d'une grandeur et sur la variabilité observée (ou estimée) de cette valeur rend entièrement inutile tout recours au concept d'erreur.

Annexe F

Conseils pratiques pour l'évaluation des composantes de l'incertitude

Cette annexe donne des conseils complémentaires pour l'évaluation des composantes de l'incertitude, principalement d'une nature pratique; ils ont pour but de venir en complément des conseils déjà donnés à l'Article [4](#).

F.1 Composantes évaluées à partir d'observations répétées: évaluation de Type A de l'incertitude-type

F.1.1 Hasard et observations répétées

F.1.1.1 Les incertitudes déterminées à partir d'observations répétées sont souvent opposées à celles qui sont évaluées par d'autres moyens comme étant «objectives», «statistiquement rigoureuses», etc. Cela implique à tort qu'elles peuvent être évaluées simplement en appliquant des formules statistiques aux observations et que leur évaluation ne nécessite pas l'application de jugement.

F.1.1.2 On doit d'abord se demander, «dans quelle mesure les observations répétées sont-elles bien des répétitions du mode opératoire totalement indépendantes?» Si la totalité des observations porte sur un échantillon unique et si l'échantillonnage fait partie du mode opératoire parce que le mesurande est la propriété d'un matériau (par opposition à la propriété d'une éprouvette donnée du matériau), les observations ne sont alors pas répétées de manière indépendante; à la variance observée des observations répétées faites sur l'échantillon unique, on doit ajouter une évaluation d'une composante de variance provenant de différences possibles entre échantillons.

Si la mise à zéro d'un instrument fait partie du mode opératoire, le réglage du zéro de l'instrument doit faire partie de chaque répétition, même s'il y a une dérive négligeable pendant la période où l'on effectue les observations, parce qu'il existe potentiellement une composante de l'incertitude que l'on peut attribuer à la mise à zéro et déterminable statistiquement.

De manière analogue, si l'on doit lire un baromètre, il faut le faire en principe pour chaque répétition du mesurage (de préférence après l'avoir déréglé et lui avoir donné le temps de retrouver son équilibre), parce qu'il peut y avoir une variation, et de l'indication et de la lecture, même si la pression atmosphérique est constante.

F.1.1.3 On doit se demander ensuite si la totalité des influences supposées être aléatoires est bien réellement aléatoire. Les moyennes et variances des lois sont-elles bien constantes? Ou peut-être y a-t-il une dérive dans la valeur d'une grandeur d'influence non mesurée pendant la période des observations répétées? Si l'on dispose d'un nombre suffisant d'observations, on peut calculer les moyennes arithmétiques des résultats des première et deuxième moitiés de la période, ainsi que leurs écarts-types expérimentaux puis comparer les deux moyennes entre elles pour juger si leur différence est statistiquement significative et en déduire s'il y a un effet fonction du temps.

F.1.1.4 Si les valeurs liées aux alimentations du laboratoire (tension et fréquence de l'alimentation électrique, pression et température de l'eau, pression d'azote, etc.) sont des grandeurs d'influence, il y a normalement dans leurs variations une composante fortement aléatoire sur laquelle il n'est pas possible de passer.

F.1.1.5 Si le dernier chiffre significatif d'une indication numérique varie continuellement durant une observation en raison du «bruit», il est parfois difficile de ne pas choisir involontairement des valeurs personnellement privilégiées de ce chiffre. Il est préférable de mettre en place un moyen pour geler l'indication à un instant arbitraire et d'enregistrer ce résultat.

F.1.2 Corrélations

La plupart des éléments de ce paragraphe sont aussi applicables aux évaluations de Type B de l'incertitude-type.

F.1.2.1 La covariance associée aux estimations des deux grandeurs d'entrée X_i et X_j peut être prise égale à zéro ou traitée comme non significative si

- a) X_i et X_j sont *non corrélés* (les variables aléatoires, non les grandeurs physiques qui sont supposées être invariantes — voir 4.1.1, Note 1), par exemple parce qu'elles ont été mesurées de manière répétée mais non simultanément dans des essais indépendants *différents* ou parce qu'elles représentent des grandeurs résultant d'évaluations *différentes* faites indépendamment, ou si
- b) l'une des grandeurs X_i ou X_j peut être traitée comme une constante, ou si
- c) on possède une information insuffisante pour évaluer la covariance associée aux estimations de X_i et X_j .

NOTE 1 Dans d'autres cas tels que l'exemple de la résistance de référence de la Note 1 de 5.2.2, il apparaît que les grandeurs d'entrée sont complètement corrélées et que les incertitudes-types de leurs estimations se combinent linéairement.

NOTE 2 Des essais différents peuvent ne pas être indépendants si, par exemple, on utilise le même instrument pour chacun d'eux (voir F.1.2.3).

F.1.2.2 Le fait que deux grandeurs d'entrée observées de manière répétée et simultanée soient corrélées peut être déterminé à l'aide de l'Équation (17) de 5.2.3. Par exemple, si la fréquence d'un oscillateur avec une compensation nulle ou faible de la température est une grandeur d'entrée, si la température ambiante est aussi une grandeur d'entrée et si elles sont observées simultanément, il peut y avoir une corrélation significative mise en évidence par la covariance calculée de la fréquence de l'oscillateur et de la température ambiante.

F.1.2.3 En pratique, les grandeurs d'entrée sont souvent corrélées parce qu'on utilise dans l'estimation de leurs valeurs le même étalon physique, le même instrument de mesure, la même donnée de référence ou encore la même méthode de mesure, avec une incertitude significative. Sans perte de généralité, supposons que deux grandeurs d'entrée X_1 et X_2 estimées par x_1 et x_2 dépendent d'un ensemble de variables non corrélées $Q_1, Q_2, \dots, Q_L$. On a alors $X_1 = F(Q_1, Q_2, \dots, Q_L)$ et $X_2 = G(Q_1, Q_2, \dots, Q_L)$, avec certaines variables pouvant apparaître seulement dans l'une ou l'autre des fonctions. Si $u^2(q_l)$ est la variance associée à l'estimation q_l de Q_l , alors la variance estimée associée à x_1 est, à partir de l'Équation (10) de 5.1.2,

$$u^2(x_1) = \sum_{l=1}^L \left(\frac{\partial F}{\partial q_l} \right)^2 u^2(q_l) \quad (\text{F.1})$$

avec une expression analogue pour $u^2(x_2)$. La covariance associée à x_1 et x_2 est donnée par

$$u(x_1, x_2) = \sum_{l=1}^L \frac{\partial F}{\partial q_l} \frac{\partial G}{\partial q_l} u^2(q_l) \quad (\text{F.2})$$

Parce que ce sont seulement les termes pour lesquels $\partial F / \partial q_l \neq 0$ et $\partial G / \partial q_l \neq 0$ pour un l donné qui contribuent à la somme, la covariance est nulle s'il n'y a pas de variable commune à la fois à F et à G .

Le coefficient de corrélation estimé $r(x_1, x_2)$ associé aux deux estimations x_1 et x_2 est déterminé à partir de $u(x_1, x_2)$ [Équation (F.2)] et de l'Équation (14) de 5.2.2, avec $u(x_1)$ calculé à partir de l'Équation (F.1) et $u(x_2)$ à partir d'une expression analogue. [Voir aussi l'Équation (H.9) de H.2.3.] Il est aussi possible, pour la covariance estimée associée à deux grandeurs d'entrée, d'avoir à la fois une composante statistique [voir l'Équation (17) de 5.2.3] et une composante évaluée comme cela est expliqué dans le présent paragraphe.

EXEMPLE 1 Une résistance étalon R_S est utilisée dans le même mesurage pour déterminer à la fois une intensité de courant électrique I et une température t . Le courant est déterminé en mesurant, avec un voltmètre numérique, la différence de potentiel aux bornes de l'étalon; la température est déterminée en mesurant, avec un pont de résistances et l'étalon, la résistance $R_t(t)$ d'un capteur de température étalonné dont la relation température-résistance est donnée par $t = aR_t^2(t) - t_0$, dans la plage $15\text{ °C} \leq t \leq 30\text{ °C}$, a et t_0 étant des constantes connues. L'intensité de courant électrique est alors déterminée par la relation $I = V_S/R_S$ et la température par la relation $t = a\beta^2(t)R_S^2 - t_0$, où $\beta(t)$ est égal au rapport mesuré $R_t(t)/R_S$, fourni par le pont.

Comme la grandeur R_S est la seule qui soit commune aux expressions donnant I et t , l'Équation (F.2) donne pour la covariance de I et t

$$u(I, t) = \frac{\partial I}{\partial R_S} \frac{\partial t}{\partial R_S} u^2(R_S) = \left(-\frac{V_S}{R_S^2} \right) \left[2a\beta^2(t)R_S \right] u^2(R_S) = -\frac{2I(t+t_0)}{R_S^2} u^2(R_S)$$

(Pour simplifier la notation, le même symbole est utilisé dans cet exemple à la fois pour la grandeur d'entrée et pour son estimation.)

Pour obtenir la valeur numérique de la covariance, on substitue dans cette expression les valeurs numériques des grandeurs mesurées I et t , et les valeurs de R_S et de $u(R_S)$ données dans le certificat d'étalonnage de la résistance étalon. Il est clair que l'unité de $u(I, t)$ est A·°C puisque la dimension de la variance relative $[u(R_S)/R_S]^2$ est égale à un (c'est-à-dire que cette dernière est une grandeur dite sans dimension).

Supposons de plus qu'une grandeur P soit reliée aux grandeurs d'entrée I et t par $P = C_0 I^2 / (T_0 + t)$, où C_0 et T_0 sont des constantes connues d'incertitude négligeable [$u^2(C_0) \approx 0$, $u^2(T_0) \approx 0$]. L'Équation (13) de 5.2.2 donne alors pour la variance de P en fonction des variances de I et de t et de leur covariance

$$\frac{u^2(P)}{P^2} = 4 \frac{u^2(I)}{I^2} - 4 \frac{u(I, t)}{I(T_0 + t)} + \frac{u^2(t)}{(T_0 + t)^2}$$

Les variances $u^2(I)$ et $u^2(t)$ sont obtenues en appliquant l'Équation (10) de 5.1.2 à la relation $I = V_S/R_S$ et $t = a\beta^2(t)R_S^2 - t_0$. On obtient

$$\begin{aligned} u^2(I)/I^2 &= u^2(V_S)/V_S^2 + u^2(R_S)/R_S^2 \\ u^2(t) &= 4(t+t_0)^2 u^2(\beta)/\beta^2 + 4(t+t_0)^2 u^2(R_S)/R_S^2 \end{aligned}$$

où, par simplification, on suppose que les incertitudes des constantes t_0 et a sont aussi négligeables. Ces expressions peuvent être facilement évaluées puisque $u^2(V_S)$ et $u^2(\beta)$ peuvent être respectivement déterminés à partir de lectures répétées du voltmètre et du pont de résistance. Il faut naturellement tenir compte de toutes les incertitudes qui dépendent des instruments de mesure eux-mêmes et des modes opératoires utilisés lorsqu'on détermine $u^2(V_S)$ et $u^2(\beta)$.

EXEMPLE 2 Dans l'exemple de la Note 1 de 5.2.2, supposons que l'étalonnage de chaque résistance soit représenté par $R_i = \alpha_i R_S$, avec l'incertitude-type $u(\alpha_i)$ du rapport mesuré α_i obtenue à partir d'observations répétées. Supposons de plus que $\alpha_i \approx 1$ pour chaque résistance et que $u(\alpha_i)$ soit essentiellement le même pour chaque étalonnage, de sorte que $u(\alpha_i) \approx u(\alpha)$. Alors les Équations (F.1) et (F.2) donnent $u^2(R_i) = R_S^2 u^2(\alpha) + u^2(R_S)$ et $u(R_i, R_j) = u^2(R_S)$. Cela entraîne par l'Équation (14) de 5.2.2 que le coefficient de corrélation de deux résistances quelconques ($i \neq j$) est

$$r(R_i, R_j) \equiv r_{ij} = \left\{ 1 + \left[\frac{u(\alpha)}{u(R_S)/R_S} \right]^2 \right\}^{-1}$$

Puisque $u(R_S)/R_S = 10^{-4}$, si $u(\alpha) = 100 \times 10^{-6}$, $r_{ij} \approx 0,5$; si $u(\alpha) = 10 \times 10^{-6}$, $r_{ij} \approx 0,990$; et si $u(\alpha) = 1 \times 10^{-6}$, $r_{ij} \approx 1,000$. Alors quand $u(\alpha) \rightarrow 0$, $r_{ij} \rightarrow 1$, et $u(R_i) \rightarrow u(R_S)$.

NOTE En général, dans les étalonnages par comparaison analogues à cet exemple, les valeurs estimées des objets étalonnés sont corrélées, avec un degré de corrélation qui dépend du rapport entre l'incertitude de la comparaison et l'incertitude de l'étalon de référence. Lorsque l'incertitude de la comparaison est négligeable par rapport à l'incertitude de l'étalon, ce qui se produit souvent en pratique, les coefficients de corrélation sont égaux à +1 et l'incertitude de chaque objet étalonné est la même que celle de l'étalon.

F.1.2.4 On peut se passer d'introduire la covariance $u(x_i, x_j)$ si l'ensemble de départ des grandeurs d'entrée $X_1, X_2, \dots, X_N$ dont dépend le mesurande Y [voir Équation (1) de 4.1] est redéfini de façon à introduire comme grandeurs d'entrée indépendantes additionnelles les grandeurs Q_i qui sont communes à deux ou plus des X_i de départ (il peut être nécessaire d'effectuer des mesurages complémentaires pour établir complètement la relation entre Q_i et les X_i concernés). Néanmoins, il peut être plus commode, dans certaines situations, de retenir les covariances plutôt que d'accroître le nombre de grandeurs d'entrée. Un traitement analogue peut être appliqué sur les covariances observées résultant d'observations simultanées répétées [voir Équation (17) de 5.2.3], mais la mise en évidence des grandeurs d'entrée complémentaires appropriées est souvent artificielle, sans raisons physiques.

EXEMPLE Si, dans l'Exemple 1 en F.1.2.3 les expressions pour I et t en fonction de R_S sont introduites dans l'expression de P , le résultat est

$$P = \frac{C_0 V_S^2}{R_S^2 [T_0 + a\beta^2(t) R_S^2 - t_0]}$$

et l'on évite la corrélation entre I et t , quitte à remplacer les grandeurs d'entrée I et t par les grandeurs V_S , R_S , et β . Comme ces grandeurs ne sont pas corrélées, la variance de P peut être obtenue à partir de l'Équation (10) de 5.1.2.

F.2 Composantes évaluées par d'autres moyens: évaluation de Type B de l'incertitude-type

F.2.1 La nécessité d'évaluations de Type B

Si un laboratoire de mesure disposait de ressources et d'un temps illimités, il pourrait effectuer une recherche statistique exhaustive de toutes les causes concevables d'incertitude, par exemple par l'utilisation d'instruments de différents types et de différents fabricants, avec différentes méthodes de mesure, avec différents modes d'application de la méthode, et différentes approximations dans les modèles théoriques du mesurage. Les incertitudes associées à toutes ces causes pourraient alors être évaluées par l'analyse statistique de séries d'observations et l'incertitude due à chaque cause pourrait être caractérisée par un écart-type évalué statistiquement. En d'autres termes, toutes les composantes de l'incertitude seraient obtenues par des évaluations de Type A. Comme une telle étude n'est pas envisageable économiquement, de nombreuses composantes de l'incertitude doivent être évaluées par tous les autres moyens praticables.

F.2.2 Lois mathématiquement déterminées

F.2.2.1 La résolution d'une indication numérique

Le dispositif indicateur d'un instrument numérique est une source d'incertitude. Par exemple, si les indications répétées étaient toutes identiques, l'incertitude du mesurage attribuable à la répétabilité ne serait pas égale à zéro parce que la même indication serait obtenue pour une étendue de signaux d'entrée sur l'instrument balayant un intervalle connu. Si la résolution du dispositif indicateur est δx , la valeur du signal d'entrée qui produit une indication donnée X peut se situer avec une égale probabilité à n'importe quel endroit de l'intervalle allant de $X - \delta x/2$ à $X + \delta x/2$. Le signal d'entrée est alors décrit par une loi de probabilité rectangulaire (voir 4.3.7 et 4.4.5), de largeur δx et de variance $u^2 = (\delta x)^2/12$, entraînant une incertitude-type de $u = 0,29\delta x$ pour toute indication.

Ainsi, un instrument de pesage ayant un dispositif indicateur dont le chiffre significatif le plus petit est égal à 1 g a une variance due à la résolution du dispositif égale à $u^2 = (1/12) \text{ g}^2$ une incertitude-type égale à $u = (1/\sqrt{12}) \text{ g} = 0,29 \text{ g}$.

F.2.2.2 Hystérésis

Certains types d'hystérésis peuvent entraîner un type analogue d'incertitude. L'indication d'un instrument peut différer d'une quantité fixe et connue selon que les lectures successives se font par valeurs croissantes ou décroissantes. L'opérateur prudent prend note du sens des lectures successives et fait les corrections appropriées. Mais le sens de l'hystérésis n'est pas toujours observable: il peut y avoir des oscillations cachées

de l'instrument autour d'un point d'équilibre de sorte que l'indication dépende du sens final d'approche de ce point. Si la largeur de l'étendue des lectures possibles dues à cette cause est δx , la variance est de nouveau $u^2 = (\delta x)^2/12$, et l'incertitude-type due à l'hystérésis est $u = 0,29\delta x$.

F.2.2.3 Calculs à précision limitée

L'arrondissement ou la troncature des nombres qui se produit dans les réductions automatiques de données par les ordinateurs peut aussi être une source d'incertitude. Considérons par exemple un ordinateur avec une longueur de mots de 16 bits. Si, au cours du calcul, un nombre correspondant à cette longueur de mots est soustrait d'un autre nombre dont il diffère seulement par le 16e bit, il reste seulement un bit significatif. De tels cas peuvent se produire dans l'évaluation d'algorithmes «mal conditionnés» et ils peuvent être difficiles à prévoir. On peut obtenir une détermination empirique de l'incertitude en augmentant par petits incréments la grandeur d'entrée la plus importante pour le calcul (il y en a souvent une qui est proportionnelle à l'ordre de grandeur de la grandeur de sortie) jusqu'à une variation de la grandeur de sortie; la plus petite variation de la grandeur de sortie obtenue de cette façon peut être prise comme une mesure de l'incertitude; si elle est δx , la variance est $u^2 = (\delta x)^2/12$ et $u = 0,29\delta x$.

NOTE On peut vérifier l'évaluation de l'incertitude en comparant le résultat du calcul effectué sur une machine à longueur de mot limitée au résultat du même calcul effectué sur une machine possédant une longueur de mot significativement plus grande.

F.2.3 Valeurs d'entrée d'origine extérieure

F.2.3.1 Une valeur d'origine extérieure pour une grandeur d'entrée est une valeur qui n'a pas été estimée au cours d'un mesurage donné mais qui a été obtenue par ailleurs comme le résultat d'une évaluation indépendante. Une telle valeur d'origine extérieure est fréquemment accompagnée par des indications sur son incertitude. Par exemple, l'incertitude peut être donnée sous forme d'un écart-type, d'un multiple d'écart-type, par la demi-largeur d'un intervalle d'un niveau de confiance donné, ou par des limites maximales. On peut aussi donner des limites supérieure et inférieure, ou bien il peut aussi arriver qu'aucune information ne soit fournie sur l'incertitude. Dans ce dernier cas, les utilisateurs de la valeur doivent employer leur propre connaissance sur l'ordre de grandeur probable de l'incertitude, selon la nature de la grandeur, la fiabilité de l'origine, les incertitudes obtenues en pratique pour de telles grandeurs, etc.

NOTE C'est par commodité que la présentation sur l'incertitude des grandeurs d'entrée d'origine extérieure est donnée dans ce paragraphe sur l'évaluation de Type B de l'incertitude-type; l'incertitude d'une telle grandeur peut comporter des composantes obtenues par des évaluations de Type A ou des composantes obtenues à la fois par des évaluations de Type A et de Type B. Comme il n'est pas nécessaire de faire la distinction entre les composantes évaluées par les deux différentes méthodes lorsqu'on calcule une incertitude-type composée, il n'est pas nécessaire de connaître la composition de l'incertitude d'une grandeur d'origine extérieure.

F.2.3.2 Certains laboratoires d'étalonnage ont adopté en pratique l'expression de «l'incertitude» sous la forme de limites supérieure et inférieure qui définissent un intervalle ayant un niveau de confiance «minimal», par exemple «au moins» 95 pour-cent. Cela peut être considéré comme un exemple de ce que l'on a appelé une incertitude «sûre» (voir [E.1.2](#)), laquelle ne peut pas être transformée en une incertitude-type sans savoir comment l'intervalle a été calculé. Si l'information fournie est suffisante, l'incertitude-type peut être recalculée en accord avec les règles de ce *Guide*; sinon, une évaluation indépendante de l'incertitude doit être faite par tous les moyens disponibles.

F.2.3.3 Certaines incertitudes sont simplement données comme limites extrêmes entre lesquelles *toutes* les valeurs de la grandeur sont soi-disant situées. La pratique courante est de supposer que toutes les valeurs entre ces limites sont également probables (loi de probabilité rectangulaire), mais il ne faudrait pas adopter une telle hypothèse s'il y avait des raisons de s'attendre à ce que les valeurs situées à l'intérieur et au voisinage des limites soient moins probables que celles situées au voisinage du centre de l'intervalle compris entre ces limites. Une loi rectangulaire de demi-largeur a a une variance égale à $a^2/3$; une loi normale pour laquelle a est la demi-largeur de l'intervalle ayant un niveau de confiance de 99,73 pour-cent a une variance égale à $a^2/9$. Il peut être prudent d'adopter un compromis entre ces valeurs, par exemple en supposant que la loi soit triangulaire, avec une variance égale à $a^2/6$ (voir [4.3.9](#) et [4.4.6](#)).

F.2.4 Valeur d'entrée mesurée

F.2.4.1 Observation unique, instruments étalonnés

Si une estimation d'entrée a été obtenue à partir d'une observation unique avec un instrument déterminé qui a été étalonné par rapport à un étalon de faible incertitude, l'incertitude de l'estimation est principalement une incertitude de répétabilité. La variance de mesurages répétés avec le même instrument peut avoir été obtenue lors d'une occasion antérieure, non nécessairement à la même valeur précise de lecture mais à une valeur suffisamment proche pour être utilisable et il peut être admis d'en déduire la variance applicable à la valeur d'entrée en question. Si l'on ne dispose pas d'une telle information, une estimation doit être faite, en prenant pour base la nature de l'appareil ou de l'instrument de mesure, les variances connues d'autres instruments de construction analogue, etc.

F.2.4.2 Observation unique, instruments vérifiés

Tous les instruments de mesure ne sont pas accompagnés d'un certificat d'étalonnage ou d'une courbe d'étalonnage. La plupart des instruments, cependant, sont construits sur la base d'une norme écrite et ils sont vérifiés, pour leur conformité à cette norme, soit par le fabricant, soit par une autorité indépendante. Habituellement, la norme contient les exigences métrologiques, souvent sous la forme d'«erreurs maximales admissibles», auxquelles il est exigé que l'instrument soit conforme. La conformité de l'instrument à ces exigences est déterminée par comparaison à un instrument de référence dont l'incertitude maximale permise est habituellement spécifiée dans la norme. Cette incertitude est alors une composante de l'incertitude de l'instrument vérifié.

Si l'on ne connaît rien sur la courbe d'erreur caractéristique de l'instrument vérifié, il faut supposer qu'il y a une probabilité égale que l'erreur ait n'importe quelle valeur dans les limites permises, c'est-à-dire que l'on ait une loi de probabilité rectangulaire. Cependant, certains types d'instruments ont des courbes caractéristiques telles que les erreurs sont, par exemple, vraisemblablement toujours positives dans une partie de la plage de mesure et négatives dans d'autres parties. On peut parfois déduire ce genre d'information d'une étude de la norme.

F.2.4.3 Grandeurs sous contrôle

Les mesurages sont souvent effectués dans des conditions de référence contrôlées qui sont supposées rester constantes au cours d'une série de mesurages. Par exemple, des mesurages peuvent être effectués sur des éprouvettes placées dans un bain à circulation d'huile dont la température est régulée par un thermostat. La température du bain peut être mesurée au moment de chaque mesurage sur une éprouvette, mais si la température du bain est cyclique, la température instantanée de l'éprouvette peut ne pas être celle indiquée par le thermomètre dans le bain. Le calcul des fluctuations de température de l'éprouvette et de leur variance, sur la base de la théorie du transfert de chaleur, est hors du domaine de ce *Guide* mais il doit être fait à partir d'un cycle de température connu ou supposé pour le bain. Ce cycle peut être observé à l'aide d'un thermocouple de précision et d'un enregistreur de température mais, à défaut, on pourra en déduire une approximation à partir de la connaissance que l'on peut avoir sur la nature des régulations.

F.2.4.4 Distributions asymétriques de valeurs possibles

Il y a des occasions où toutes les valeurs possibles d'une grandeur se situent d'un seul côté d'une valeur limite unique. Par exemple, lorsqu'on mesure la hauteur verticale fixe h (le mesurande) d'une colonne de liquide dans un manomètre, l'axe du dispositif de mesure de la hauteur peut s'écarter de la verticalité d'un petit angle β . La distance l déterminée par le dispositif sera toujours *supérieure* à h ; il n'y a pas de valeurs inférieures à h possibles, puisque h est égal à la projection $l\cos\beta$, entraînant $l = h/\cos\beta$, et toutes les valeurs de $\cos\beta$ sont inférieures à un. Cette erreur appelée «erreur en cosinus» peut aussi se produire de telle façon que la projection $h' \cos\beta$ d'un mesurande h' soit égale à la distance observée l , c'est-à-dire $l = h' \cos\beta$, et que la distance observée soit toujours *inférieure* au mesurande.

Si l'on introduit une nouvelle variable $\delta = 1 - \cos\beta$ les deux situations différentes sont, en supposant $\beta \approx 0$ ou $\delta \ll 1$ ce qui est habituellement le cas en pratique,

$$h = \bar{l} (1 - \delta) \quad (\text{F.3a})$$

$$h' = \bar{l} (1 + \delta) \quad (\text{F.3b})$$

avec $\bar{l}$, meilleure estimation de l , égal à la moyenne arithmétique de n observations répétées indépendantes l_k de l avec la variance estimée $u^2(\bar{l})$ [voir Équations (3) et (5) de 4.2]. On en déduit alors, à partir des Équations (F.3a) et (F.3b) que pour obtenir une estimation de h ou h' il faut une estimation du facteur de correction δ , que pour obtenir l'incertitude-type composée de l'estimation de h ou h' il faut aussi $u^2(\delta)$, variance estimée de δ . Plus spécifiquement, l'application de l'Équation (10) de 5.1.2 aux Équations (F.3a) et (F.3b) donne pour $u_c^2(h)$ et $u_c^2(h')$ (signes – et +, respectivement)

$$u_c^2 = (1 \mp \delta)^2 u^2(\bar{l}) + \bar{l}^2 u^2(\delta) \quad (\text{F.4a})$$

$$\approx u^2(\bar{l}) + \bar{l}^2 u^2(\delta) \quad (\text{F.4b})$$

Pour obtenir l'estimation de la valeur espérée de δ et de la variance de δ , supposons que l'axe du dispositif utilisé pour mesurer la hauteur de la colonne de liquide dans le manomètre soit assujéti à rester dans un plan vertical et que les valeurs de l'angle d'inclinaison β autour de sa valeur espérée, égale à zéro, soient distribuées normalement avec une variance σ^2 . Bien que β puisse avoir des valeurs à la fois positives et négatives, $\delta = 1 - \cos\beta$ est positif pour toutes les valeurs de β . Si l'on suppose qu'il n'y a pas d'assujettissement pour le désalignement de l'axe du dispositif, l'orientation de l'axe peut varier dans un angle solide puisqu'il peut se désaligner dans un azimut quelconque mais β reste toujours un angle positif.

Dans le cas de l'assujettissement de β à un plan vertical, cas unidimensionnel, la **probabilité élémentaire** $p(\beta)d\beta$ (C.2.5, Note) est proportionnelle à $\{\exp[-\beta^2/(2\sigma^2)]\}d\beta$; dans le cas bidimensionnel ou non assujéti, la probabilité élémentaire est proportionnelle à $\{\exp[-\beta^2/(2\sigma^2)]\}\sin\beta d\beta$. Dans les deux cas, les densités de probabilité $p(\delta)$ sont les expressions nécessaires pour déterminer l'espérance mathématique et la variance de δ à utiliser dans les Équations (F.3) et (F.4). Elles peuvent être aisément obtenues à partir de ces probabilités élémentaires parce que l'angle β peut être supposé petit et qu'on peut alors développer $\delta = 1 - \cos\beta$ et $\sin\beta$ à l'ordre le plus bas de β . Cela donne $\delta \approx \beta^2/2$, $\sin\beta \approx \beta = \sqrt{2\delta}$, et $d\beta = d\delta/\sqrt{2\delta}$. Les densités de probabilité sont alors

$$p(\delta) = \frac{1}{\sigma\sqrt{\pi\delta}} \exp(-\delta/\sigma^2) \quad (\text{F.5a})$$

pour une dimension,

$$p(\delta) = \frac{1}{\sigma^2} \exp(-\delta/\sigma^2) \quad (\text{F.5b})$$

pour deux dimensions, avec

$$\int_0^\infty p(\delta) d\delta = 1$$

Les Équations (F.5a) et (F.5b), qui montrent que la valeur la plus probable de la correction δ dans les deux cas est égale à zéro, donnent dans le cas unidimensionnel $E(\delta) = \sigma^2/2$ et $\text{var}(\delta) = \sigma^4/2$ pour l'espérance mathématique et la variance de δ ; et dans le cas bidimensionnel $E(\delta) = \sigma^2$ et $\text{var}(\delta) = \sigma^4$. Les Équations (F.3a), (F.3b) et (F.4b) deviennent alors

$$h = \bar{l} \left[1 - (d/2) u^2(\beta) \right] \quad (\text{F.6a})$$

$$h' = \bar{l} \left[1 + (d/2) u^2(\beta) \right] \quad (\text{F.6b})$$

$$u_c^2(h) = u_c^2(h') = u^2(\bar{l}) + (d/2) \bar{l}^2 u^4(\beta) \quad (\text{F.6c})$$

où d est le nombre de dimensions ($d = 1$ ou 2) et $u(\beta)$ est l'incertitude-type de l'angle β , prise comme étant la meilleure estimation de l'écart-type σ d'une loi supposée normale, évaluée à partir de la totalité de l'information disponible concernant le mesurage (évaluation de Type B). C'est un exemple d'un cas où l'estimation de la valeur d'un mesurande dépend de l'incertitude d'une grandeur d'entrée.

Bien que les Équations (F.6a) à (F.6c) soient spécifiques de la loi normale, on peut effectuer l'analyse en supposant d'autres lois pour β . Par exemple, si l'on suppose que β suit une loi rectangulaire symétrique avec $+\beta_0$ et $-\beta_0$ comme limites supérieure et inférieure dans le cas unidimensionnel et $+\beta_0$ et 0 dans le cas bidimensionnel, $E(\delta) = \beta_0^2/6$ et $\text{var}(\delta) = \beta_0^4/45$ pour une dimension et $E(\delta) = \beta_0^2/4$ et $\text{var}(\delta) = \beta_0^4/48$ pour deux dimensions.

NOTE On a là une situation où le développement de la fonction $Y = f(X_1, X_2, \dots, X_N)$ en série de Taylor du premier ordre pour obtenir $u_c^2(y)$, Équation (10) de 5.1.2, est insuffisant en raison de la non-linéarité de f : $\overline{\cos\beta} \neq \cos\bar{\beta}$ (voir Note de 5.1.2 et H.2.4). Bien que l'on puisse effectuer entièrement l'analyse avec β , l'introduction de la variable δ simplifie le problème.

Un autre exemple d'une situation où toutes les valeurs possibles d'une grandeur sont réunies d'un seul côté d'une limite unique consiste en la détermination par titration de la concentration d'un composant dans une solution lorsque le point final est indiqué par le déclenchement d'un signal; la quantité de réactif ajouté est toujours supérieure à celle qui serait juste nécessaire pour déclencher le signal; elle n'est jamais inférieure. La quantité de réactif en excès par rapport à celle correspondant au point équivalent est une variable nécessaire dans la réduction des données et, dans ce cas ainsi que dans les cas analogues, la procédure consiste à supposer une loi de probabilité appropriée pour le réactif en excès et à l'utiliser pour obtenir l'espérance mathématique et la variance de l'excès.

EXEMPLE Si l'on suppose une loi rectangulaire de limite inférieure zéro et de limite supérieure C_0 pour le réactif en excès z , l'espérance mathématique de l'excès est alors $C_0/2$ et la variance associée $C_0^2/12$. Si la densité de probabilité de l'excès est supposée être normale avec $0 \leq z < \infty$, c'est-à-dire $p(z) = (\sigma\sqrt{\pi/2})^{-1} \exp[-z^2/(2\sigma^2)]$, l'espérance mathématique est alors égale à $\sigma\sqrt{2/\pi}$ et la variance à $\sigma^2(1 - 2/\pi)$.

F.2.4.5 Incertitude lorsque les corrections ne sont pas appliquées à partir d'une courbe d'étalonnage

La Note de 6.3.1 présente le cas où une correction connue b pour un effet systématique significatif n'est pas appliquée au résultat donné d'un mesurage mais, au lieu de cela, est prise en compte par un élargissement de l'«incertitude» attribuée au résultat. On peut par exemple remplacer une incertitude élargie U par $U + b$, ou U est une incertitude élargie obtenue avec l'hypothèse $b = 0$. Cette pratique est parfois suivie pour les situations où s'appliquent toutes les conditions suivantes: le mesurande Y est défini sur une étendue de valeurs d'un paramètre t , comme dans le cas d'une courbe d'étalonnage pour un capteur de température; U et b dépendent aussi de t ; et il y a seulement une unique valeur d'«incertitude» à attribuer à toutes les estimations $y(t)$ du mesurande sur l'étendue des valeurs possibles de t . Dans de telles situations, le résultat du mesurage est souvent donné sous la forme $Y(t) = y(t) \pm [U_{\max} + b_{\max}]$, où l'indice «max» indique que l'on utilise la valeur maximale de U et la valeur maximale de la correction connue b sur l'étendue des valeurs de t .

Bien que ce Guide recommande d'appliquer les corrections aux résultats de mesure pour les effets systématiques reconnus comme significatifs, cela peut ne pas toujours être faisable dans une telle situation en raison du coût inacceptable que cela entraînerait pour calculer et appliquer une correction individuelle puis calculer et appliquer une incertitude individuelle pour chaque valeur de $y(t)$.

Une approche relativement simple de ce problème, compatible avec les principes de ce Guide est la suivante:

Calculer une correction moyenne unique $\bar{b}$ à partir de

$$\bar{b} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} b(t) dt \quad (\text{F.7a})$$

où t_1 et t_2 définissent l'étendue à laquelle on s'intéresse pour le paramètre t , et prendre comme meilleure estimation de $Y(t)$, $y'(t) = y(t) + \bar{b}$, où $y(t)$ est la meilleure estimation non corrigée de $Y(t)$. La variance associée à la correction moyenne $\bar{b}$ sur l'intervalle en cause est donnée par

$$u^2(\bar{b}) = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} [b(t) - \bar{b}]^2 dt \quad (\text{F.7b})$$

en ne prenant pas en compte l'incertitude de la détermination réelle de la correction $b(t)$. La variance moyenne de la correction $b(t)$ due à sa détermination réelle est donnée par

$$\overline{u^2[b(t)]} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} u^2[b(t)] dt \quad (\text{F.7c})$$

où $u^2[b(t)]$ est la variance de la correction $b(t)$. De manière analogue, la variance moyenne de $y(t)$ provenant de toutes les sources d'incertitude autres que la correction $b(t)$ est obtenue à partir de

$$\overline{u^2[y(t)]} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} u^2[y(t)] dt \quad (\text{F.7d})$$

où $u^2[y(t)]$ est la variance de $y(t)$ due à toutes les sources d'incertitude autres que $b(t)$. La valeur unique de l'incertitude-type à utiliser pour toutes les estimations $y'(t) = y(t) + \bar{b}$ du mesurande $Y(t)$ est alors la racine carrée de la variance composée

$$u_c^2(y') = \overline{u^2[y(t)]} + \overline{u^2[b(t)]} + u^2(\bar{b}) \quad (\text{F.7e})$$

On peut obtenir une incertitude élargie U en multipliant $u_c(y')$ par un facteur d'élargissement k choisi de manière convenable $U = k u_c(y')$, ce qui donne $Y(t) = y'(t) \pm U = y(t) + \bar{b} \pm U$. Il faut cependant savoir qu'on a utilisé la même correction moyenne pour toutes les valeurs de t et non la correction convenable pour chaque valeur de t et il faut indiquer clairement ce que représente U .

F.2.5 Incertitude due à la méthode de mesure

F.2.5.1 La composante d'incertitude la plus difficile à évaluer est peut-être celle qui est associée à la méthode de mesure, en particulier s'il a été montré que l'on obtient des résultats de variabilité plus faible par application de cette méthode que par toute autre méthode connue. Mais il est probable qu'il existe d'autres méthodes, certaines encore inconnues ou impraticables pour une raison ou une autre, qui donneraient systématiquement des résultats différents de validité apparemment égale. Cela entraîne une loi de probabilité a priori et non pas une loi dont on puisse aisément extraire des échantillons à traiter statistiquement. Alors, même si l'incertitude de la méthode peut être l'incertitude dominante, la seule information souvent disponible pour évaluer son incertitude-type provient de ce que l'on connaît du monde physique. (Voir aussi [E.4.4](#).)

NOTE La détermination du même mesurande par différentes méthodes, soit dans un même laboratoire, soit dans différents laboratoires, ou par une même méthode dans différents laboratoires, peut souvent fournir une information valable sur l'incertitude attribuable à une méthode particulière. En général, l'échange d'étalons ou de matériaux de référence entre laboratoires pour un mesurage indépendant est un moyen commode pour évaluer la fiabilité des évaluations d'incertitude et pour identifier des effets systématiques non mis en évidence au préalable.

F.2.6 Incertitude due à l'échantillon

F.2.6.1 De nombreux mesurages comportent la comparaison d'un objet inconnu à un étalon connu, de caractéristiques analogues, pour étalonner l'objet inconnu. On peut donner en exemple des calibres à bouts, certains thermomètres, des jeux de masses marquées, des résistances et des matériaux de haute pureté. Le plus souvent dans de tels cas, la méthode de mesure n'est pas spécialement influencée ou perturbée par le traitement de l'échantillon ou par sa sélection (c'est-à-dire par l'échantillon particulier à étalonner), ou par les effets de diverses grandeurs d'influence liées à l'environnement, parce que l'échantillon inconnu et l'étalon répondent en général à ces variables d'une façon identique et souvent prévisible.

F.2.6.2 Dans certaines situations pratiques de mesure, l'échantillonnage et le traitement de l'éprouvette jouent un rôle bien plus important. Cela est souvent le cas pour l'analyse chimique des matériaux naturels. Contrairement aux matériaux fabriqués par l'homme, pour lesquels l'homogénéité peut avoir été prouvée au-delà du niveau inférieur à celui qui est exigé pour le mesurage, les matériaux naturels manquent souvent beaucoup d'homogénéité. Cette hétérogénéité conduit à deux composantes complémentaires de l'incertitude. L'évaluation de la première composante nécessite de déterminer jusqu'à quel point l'échantillon sélectionné représente correctement le matériau de base à analyser. L'évaluation de la deuxième composante nécessite de déterminer dans quelle mesure les constituants secondaires (non analysés) influencent le mesurage et sont correctement traités par la méthode de mesure.

F.2.6.3 Dans certains cas, une conception soignée de l'essai rend possible d'évaluer statistiquement l'incertitude due à l'échantillon (voir [H.5](#) et [H.5.3.2](#)). D'une manière habituelle, cependant, et spécialement lorsque les grandeurs d'influence liées à l'environnement ont des effets significatifs sur l'échantillon, il faut faire appel pour évaluer l'incertitude aux compétences et aux connaissances de l'analyste, dérivées de son expérience, et de la totalité de l'information pratiquement disponible.

Annexe G

Degrés de liberté et niveaux de confiance

G.1 Introduction

G.1.1 Cette annexe aborde la question générale de l'obtention d'une incertitude élargie $U_p = k_p u_c(y)$ à partir de l'estimation y du mesurande Y , et de l'incertitude-type composée $u_c(y)$ de cette estimation. À partir de cette incertitude élargie, on définit un intervalle $y - U_p \leq Y \leq y + U_p$ qui correspond à une probabilité ou à un niveau de confiance p , spécifiés et élevés. Cette annexe traite donc de la manière d'arriver à déterminer le facteur d'élargissement k_p qui produit, autour du résultat de mesurage y , un intervalle dont on puisse s'attendre à ce qu'il comprenne une fraction spécifiée p , élevée, de la distribution des valeurs qui pourraient être attribuées raisonnablement au mesurande Y (voir Article 6).

G.1.2 Dans la plupart des situations pratiques de mesure, le calcul d'un intervalle correspondant à un niveau de confiance spécifié, au mieux, ne peut qu'être approximatif comme, en fait, l'estimation de la plupart des composantes individuelles de l'incertitude dans ces situations. Même si l'on obtient un écart-type expérimental de la moyenne à partir d'un nombre d'observations répétées aussi élevé que 30 pour une grandeur décrite par une loi normale, cet écart-type a lui-même une incertitude d'environ 13 pour-cent (voir Tableau E.1 de l'Annexe E).

Dans de nombreux cas, cela n'a pas de sens d'essayer de faire la distinction entre, par exemple, un intervalle ayant un niveau de confiance de 95 pour-cent (une chance sur 20 pour que la valeur du mesurande Y soit située en dehors de l'intervalle) et un intervalle de 94 pour-cent ou 96 pour-cent (respectivement 1 chance sur 17 et 1 chance sur 25). Il est particulièrement difficile d'obtenir des intervalles légitimes qui correspondent réellement à des niveaux de confiance égaux ou supérieurs à 99 pour-cent (1 chance sur 100), même si l'on suppose qu'aucun effet systématique n'a été sous-estimé, parce que l'on possède en général très peu d'information sur les portions les plus extrêmes des « queues » des lois de probabilité des grandeurs d'entrée.

G.1.3 Pour obtenir la valeur du facteur d'élargissement k_p qui donne un intervalle correspondant à un niveau de confiance spécifié p , il est nécessaire d'avoir une connaissance détaillée de la loi de probabilité caractérisée par le résultat de mesure et son incertitude-type composée. Par exemple, pour une grandeur z décrite par une loi normale d'espérance mathématique μ_z et d'écart-type σ , il est facile de calculer la valeur de k_p qui donne un intervalle $\mu_z \pm k_p \sigma$ comprenant la fraction p de la loi et donc a une probabilité ou un niveau de confiance p . La Tableau G.1 donne quelques exemples.

Tableau G.1 — Valeur du facteur d'élargissement k_p qui donne un intervalle correspondant au niveau de confiance p , en supposant la loi normale

Niveau de confiance p (pourcentage)	Facteur d'élargissement k_p
68,27	1
90	1,645
95	1,960
95,45	2
99	2,576
99,73	3

NOTE En comparaison, si z est décrit par une loi de probabilité rectangulaire d'espérance mathématique μ_z et d'écart-type $\sigma = a/\sqrt{3}$, où a est la demi-largeur de la loi, le niveau de confiance p est 57,74 pour-cent pour $k_p = 1$; 95 pour-cent pour $k_p = 1,65$; 99 pour-cent pour $k_p = 1,71$; 100 pour-cent pour $k_p \geq \sqrt{3} \approx 1,73$; la loi rectangulaire est «plus étroite» que la loi normale, dans le sens où elle est bornée et ne possède pas de «queues».

G.1.4 Si l'on connaît les lois de probabilité des grandeurs d'entrée $X_1, X_2, \dots, X_N$ dont dépend le mesurande Y [leurs espérances mathématiques, leurs variances et leurs moments de degrés plus élevés (voir [C.2.13](#) et [C.2.22](#)) si les lois ne sont pas normales] et si Y est une fonction linéaire des grandeurs d'entrée $Y = c_1 X_1 + c_2 X_2 + \dots + c_N X_N$, la loi de probabilité de Y peut alors être obtenue par le produit de convolution des lois de probabilité individuelles [\[10\]](#). Les valeurs de k_p qui produisent des intervalles correspondant à des niveaux de confiance spécifiés p peuvent alors être calculées à partir des lois convoluées résultantes.

G.1.5 Si la relation fonctionnelle entre Y et ses grandeurs d'entrée n'est pas linéaire et si le développement en série de Taylor limité au premier ordre n'est pas une approximation convenable de cette relation (voir [5.1.2](#) et [5.1.5](#)), la loi de probabilité de Y ne peut pas être obtenue en convoluant les lois des grandeurs d'entrée. Il faut, dans ce cas-là, utiliser d'autres méthodes, analytiques ou numériques.

G.1.6 En pratique, d'une part les paramètres qui caractérisent les lois de probabilité des grandeurs d'entrée sont habituellement des estimations; d'autre part il n'est pas réaliste de s'attendre à ce que le niveau de confiance correspondant à un intervalle donné puisse être connu avec un niveau élevé d'exactitude; enfin la convolution des lois de probabilité est une opération complexe; en conséquence, cette convolution est rarement mise en œuvre lorsqu'on désire calculer l'intervalle correspondant à un niveau de confiance spécifié. On utilise à la place des approximations fondées sur le théorème central limite.

G.2 Théorème central limite

G.2.1 Si $Y = c_1 X_1 + c_2 X_2 + \dots + c_N X_N = \sum_{i=1}^N c_i X_i$ et si tous les X_i sont caractérisés par des lois normales, la loi convoluée résultante de Y sera aussi normale. Il est souvent possible, cependant, de faire l'approximation d'une loi normale pour X_i même si les lois de Y ne sont pas normales, en raison du théorème central limite. Ce théorème énonce que la loi de Y sera *approximativement normale*, avec une espérance mathématique $E(Y) = \sum_{i=1}^N c_i E(X_i)$ et une variance $\sigma^2(Y) = \sum_{i=1}^N c_i^2 \sigma^2(X_i)$, où $E(X_i)$ est l'espérance mathématique de X_i et $\sigma^2(X_i)$ est la variance de X_i , si les X_i sont indépendants et si $\sigma^2(Y)$ est beaucoup plus grand que toute composante $c_i^2 \sigma^2(X_i)$ pour un X_i dont la loi n'est pas normale.

G.2.2 Le théorème central limite a une grande portée parce qu'il montre le rôle très important joué par les variances des lois de probabilité des grandeurs d'entrée par rapport au rôle des moments plus élevés de ces lois, pour la détermination de la forme de la loi convoluée résultante de Y . Il implique en outre que la loi convoluée converge vers une loi normale avec l'augmentation du nombre des grandeurs d'entrée qui contribuent à $\sigma^2(Y)$, que la convergence sera d'autant plus rapide que les valeurs des $c_i^2 \sigma^2(X_i)$ seront plus proches les unes des autres (ce qui équivaut en pratique à ce que chaque estimation d'entrée x_i contribue par une incertitude comparable à l'incertitude de l'estimation y du mesurande Y), et que plus les lois des X_i seront proches de la normalité, moins il sera nécessaire d'en avoir un grand nombre pour obtenir une loi normale pour Y .

EXEMPLE La loi rectangulaire (voir [4.3.7](#) et [4.4.5](#)) est un exemple extrême d'une loi non-normale, mais la convolution d'un nombre aussi faible que *trois* lois rectangulaires d'égale largeur est approximativement normale. Si la demi-largeur de chacune des ces trois lois rectangulaires est a et, en conséquence la variance $a^2/3$, la variance de la loi convoluée est $\sigma^2 = a^2$. Les intervalles à 95 pour-cent et à 99 pour-cent de la loi convoluée sont définis respectivement par $1,937\sigma$ et $2,379\sigma$, alors que les intervalles correspondants pour une loi normale de même écart-type σ sont définis par $1,960\sigma$ et $2,576\sigma$ (voir Tableau [G.1](#)) [\[10\]](#).

NOTE 1 Pour tout intervalle de niveau de confiance p supérieur à environ 91,7 pour-cent, la valeur de k_p pour une loi normale est supérieure à la valeur correspondante de la loi résultant de la convolution de lois rectangulaires, quels qu'en soient le nombre et la largeur.

NOTE 2 On déduit du théorème central limite que la loi de probabilité de la moyenne arithmétique $\bar{q}$ de n observations q_k d'une variable aléatoire q d'espérance mathématique μ_q et d'écart-type fini σ tend vers une loi normale de moyenne μ_q et d'écart-type $\sigma/\sqrt{n}$ quand $n \rightarrow \infty$, quelle que soit la loi de probabilité de q .

G.2.3 Une conséquence pratique du théorème central limite est la suivante: lorsqu'on peut démontrer que ses hypothèses de validité sont approximativement satisfaites, en particulier si l'incertitude-type composée $u_c(y)$ n'est pas dominée par une composante d'incertitude-type obtenue par une évaluation de Type A fondée sur quelques observations seulement, ou par une composante d'incertitude-type obtenue par évaluation de Type B fondée sur une loi rectangulaire supposée, on utilisera pour k_p , en première approximation raisonnable, une valeur provenant de la loi normale pour le calcul d'une incertitude élargie $U_p = k_p u_c(y)$ fournissant un intervalle de niveau de confiance p . Le Tableau G.1 donne les valeurs les plus communément utilisées dans ce but.

G.3 La loi de t et les degrés de liberté

G.3.1 Pour obtenir une approximation qui soit meilleure que par la simple utilisation d'une valeur de k_p déduite de la loi normale, comme en G.2.3, on doit savoir que le calcul d'un intervalle de niveau de confiance spécifié nécessite, non la loi de la variable $[Y - E(Y)]/\sigma(Y)$, mais la loi de la variable $(y - Y)/u_c(y)$. La raison provient du fait qu'en pratique, tout ce dont on dispose est y , estimation de Y obtenue de $y = \sum_{i=1}^N c_i x_i$, où x_i est l'estimation de X_i ; et la variance composée associée à y , $u_c^2(y)$, évaluée à partir de $u_c^2(y) = \sum_{i=1}^N c_i^2 u^2(x_i)$, où $u(x_i)$ est l'incertitude-type (écart-type estimé) de l'estimation x_i .

NOTE Pour être totalement correct, dans l'expression $(y - Y)/u_c(y)$, il faudrait remplacer Y par $E(Y)$. Pour simplifier, cette distinction n'a été faite qu'en très peu d'endroits du présent Guide. En général, le même symbole a été utilisé pour la grandeur physique, la variable aléatoire qui représente cette grandeur et l'espérance mathématique de cette variable (voir 4.1.1, notes).

G.3.2 Si une variable aléatoire z d'espérance mathématique μ_z et d'écart-type σ suit une loi normale et si $\bar{z}$ est la moyenne arithmétique de n observations indépendantes z_k de z avec $s(\bar{z})$ écart-type expérimental de $\bar{z}$ [voir Équations (3) et (5) de 4.2], alors la loi de la variable $t = (\bar{z} - \mu_z)/s(\bar{z})$ est la loi de t ou loi de Student (C.3.8) à $\nu = n - 1$ degrés de liberté.

En conséquence, si le mesurande Y est simplement une grandeur unique X suivant une loi normale $Y = X$; et si X est estimé par la moyenne arithmétique $\bar{X}$ de n observations répétées indépendantes X_k de X , avec un écart-type expérimental de la moyenne $s(\bar{X})$, alors la meilleure estimation de Y est $y = \bar{X}$ et l'écart-type expérimental de cette estimation est $u_c(y) = s(\bar{X})$. Alors $t = (\bar{z} - \mu_z)/s(\bar{z}) = (\bar{X} - X)/s(\bar{X}) = (y - Y)/u_c(y)$ est distribué selon la loi de t avec

$$\Pr[-t_p(\nu) \leq t \leq t_p(\nu)] = p \quad (\text{G.1a})$$

ou

$$\Pr[-t_p(\nu) \leq (y - Y)/u_c(y) \leq t_p(\nu)] = p \quad (\text{G.1b})$$

qui peut aussi s'écrire sous la forme

$$\Pr[y - t_p(\nu) u_c(y) \leq Y \leq y + t_p(\nu) u_c(y)] = p \quad (\text{G.1c})$$

Dans ces expressions, $\Pr[]$ signifie «probabilité de» et le facteur $t_p(\nu)$ est la valeur de t pour une valeur donnée du paramètre ν — nombre de degrés de liberté (voir G.3.3) — de sorte que la fraction p de la loi de t soit comprise dans l'intervalle de $-t_p(\nu)$ à $+t_p(\nu)$. En conséquence, l'incertitude élargie

$$U_p = k_p u_c(y) = t_p(\nu) u_c(y) \quad (\text{G.1d})$$

définit un intervalle de $y - U_p$ à $y + U_p$, écrit par commodité $Y = y \pm U_p$, dont on peut s'attendre à ce qu'il comprenne une fraction p de la distribution des valeurs qui pourraient être attribuées raisonnablement à Y , et p est la probabilité ou niveau de confiance de l'intervalle.

G.3.3 Le nombre de degrés de liberté ν est égal à $n - 1$ pour une grandeur unique estimée par la moyenne arithmétique de n observations indépendantes, comme en [G.3.2](#). Si les n observations indépendantes sont utilisées pour déterminer à la fois la pente et l'ordonnée à l'origine d'une droite par la méthode des moindres carrés, le nombre de degrés de liberté de leurs incertitudes-types respectives est $\nu = n - 2$. Pour un ajustement par méthode des moindres carrés de m paramètres pour n données, le nombre de degrés de liberté de l'incertitude-type de chaque paramètre est $\nu = n - m$ (voir Référence [\[15\]](#) pour un complément de présentation sur les degrés de liberté).

G.3.4 Une sélection des valeurs de $t_p(\nu)$ pour différentes valeurs de ν et de p est donnée dans le Tableau [G.2](#) à la fin de cette annexe. Lorsque $\nu \rightarrow \infty$, la loi de t tend vers une loi normale et $t_p(\nu) \approx (1 + 2/\nu)^{1/2} k_p$, où k_p est le facteur d'élargissement nécessaire pour obtenir un intervalle de niveau de confiance p pour une variable distribuée normalement. Ainsi, dans le Tableau [G.2](#), la valeur de $t_p(\infty)$ pour une valeur donnée de p est égale à la valeur de k_p pour la même valeur de p , dans le Tableau [G.1](#).

NOTE La loi de t est souvent donnée en fractiles, c'est-à-dire que les valeurs du fractile $t_{1-\alpha}$ sont données avec $1 - \alpha$ égal à la probabilité cumulée et la relation

$$1 - \alpha = \int_{-\infty}^{t_{1-\alpha}} f(t, \nu) dt$$

définit le fractile, où f est la densité de probabilité de t . Ainsi, t_p et $t_{1-\alpha}$ sont reliés par $p = 1 - 2\alpha$. Par exemple, la valeur du fractile $t_{0,975}$, pour lequel $1 - \alpha = 0,975$ et $\alpha = 0,025$, est le même que $t_p(\nu)$ pour $p = 0,95$.

G.4 Nombre effectif de degrés de liberté

G.4.1 La loi de t ne décrit pas en général la loi de la variable $(y - Y)/u_c(y)$ si $u_c^2(y)$ est la somme de deux ou plusieurs composantes de variance estimées $u_i^2(y) = c_i^2 u^2(x_i)$ (voir [5.1.3](#)), même si chaque x_i est l'estimation d'une grandeur d'entrée X_i normalement distribuée. Il est cependant possible de faire l'approximation de la loi de cette variable par une loi de t avec un nombre effectif de degrés de liberté ν_{eff} obtenu par la formule de Welch-Satterthwaite [\[16\]](#), [\[17\]](#), [\[18\]](#)

$$\frac{u_c^4(y)}{\nu_{\text{eff}}} = \sum_{i=1}^N \frac{u_i^4(y)}{\nu_i} \quad (\text{G.2a})$$

ou

$$\nu_{\text{eff}} = \frac{u_c^4(y)}{\sum_{i=1}^N \frac{u_i^4(y)}{\nu_i}} \quad (\text{G.2b})$$

avec

$$\nu_{\text{eff}} \leq \sum_{i=1}^N \nu_i \quad (\text{G.2c})$$

où $u_c^2(y) = \sum_{i=1}^N u_i^2(y)$ (voir [5.1.3](#)). L'incertitude élargie $U_p = k_p u_c(y) = t_p(\nu_{\text{eff}}) u_c(y)$ fournit alors un intervalle $Y = y \pm U_p$ de niveau de confiance approximatif p .

NOTE 1 Si la valeur de ν_{eff} obtenue à partir de l'Équation [\(G.2b\)](#) n'est pas un nombre entier, ce qui sera habituellement le cas en pratique, la valeur correspondante de t_p peut être obtenue, à partir du Tableau [G.2](#) par interpolation ou par troncature de ν_{eff} au plus proche entier inférieur.

NOTE 2 Si une estimation d'entrée x_i est elle-même obtenue à partir de deux ou plusieurs estimations, la valeur de v_i à utiliser avec $u_i^4(y) = [c_i^2 u^2(x_i)]^2$ au dénominateur de l'Équation (G.2b) est alors le nombre effectif de degrés de liberté calculé par une expression équivalente à l'Équation (G.2b).

NOTE 3 En fonction des besoins des utilisateurs potentiels d'un résultat de mesure, il peut être utile, en complément à v_{eff} , de calculer et de donner aussi les valeurs de v_{effA} et v_{effB} , calculées à partir de l'Équation (G.2b) en traitant séparément les incertitudes-types obtenues par les évaluations de Type A et de Type B. Si l'on note respectivement $u_{\text{cA}}^2(y)$ et $u_{\text{cB}}^2(y)$ les contributions à $u_c^2(y)$ des incertitudes-types de Type A et de Type B, les différentes grandeurs sont reliées par

$$u_c^2(y) = u_{\text{cA}}^2(y) + u_{\text{cB}}^2(y)$$

$$\frac{u_c^4(y)}{v_{\text{eff}}} = \frac{u_{\text{cA}}^4(y)}{v_{\text{effA}}} + \frac{u_{\text{cB}}^4(y)}{v_{\text{effB}}}$$

EXEMPLE Supposons que $Y = f(X_1, X_2, X_3) = bX_1X_2X_3$ et que les grandeurs d'entrée x_1, x_2, x_3 étant normalement distribuées, leurs estimations X_1, X_2, X_3 soient respectivement les moyennes arithmétiques de $n_1 = 10$, $n_2 = 5$, et $n_3 = 15$ observations répétées indépendantes, avec les incertitudes-types relatives $u(x_1)/x_1 = 0,25$ pour-cent, $u(x_2)/x_2 = 0,57$ pour-cent, et $u(x_3)/x_3 = 0,82$ pour-cent. Dans ce cas, $c_i = \partial f / \partial X_i = Y/X_i$ (évalué à x_1, x_2, x_3 — voir 5.1.3, Note 1), $[u_c(y)/y]^2 = \sum_{i=1}^3 [u(x_i)/x_i]^2 = (1,03 \text{ pour-cent})^2$ (voir Note 2 à 5.1.6), et l'Équation (G.2b) devient:

$$v_{\text{eff}} = \frac{[u_c(y)/y]^4}{\sum_{i=1}^3 \frac{[u(x_i)/x_i]^4}{v_i}}$$

Alors

$$v_{\text{eff}} = \frac{1,03^4}{\frac{0,25^4}{10-1} + \frac{0,57^4}{5-1} + \frac{0,82^4}{15-1}} = 19,0$$

La valeur de t_p pour $p = 95$ pour-cent et $v = 19$ est (Tableau G.2) $t_{95}(19) = 2,09$; l'incertitude élargie relative pour ce niveau de confiance est alors $U_{95} = 2,09 \times (1,03 \text{ pour-cent}) = 2,2 \text{ pour-cent}$. On peut alors énoncer que $Y = y \pm U_{95} = y(1 \pm 0,022)$ (y déterminé à partir de $y = bx_1x_2x_3$), ou que $0,978y \leq Y \leq 1,022y$, et que le niveau de confiance à associer à l'intervalle est approximativement égal à 95 pour-cent.

G.4.2 $u_c(y)$ dépend en pratique des incertitudes-types $u(x_i)$ des estimations d'entrée de grandeurs distribuées, les unes normalement et les autres non normalement, et les $u(x_i)$ sont obtenus à partir de distributions, les unes de fréquence et les autres de lois de probabilité a priori (c'est-à-dire d'évaluation les unes de Type A et les autres de Type B). Une constatation analogue s'applique à l'estimation y et aux estimations d'entrée x_i dont dépend y . Cependant, la loi de t peut être une approximation de la loi de probabilité de la fonction $t = (y - Y)/u_c(y)$ si on la développe en série de Taylor autour de son espérance mathématique. C'est ce qui est essentiellement fait, à l'approximation d'ordre le plus bas, par la formule de Welch-Satterthwaite, Équation (G.2a) ou Équation (G.2b).

La question se pose de savoir quel est le nombre de degrés de liberté à affecter à une incertitude-type obtenue par une évaluation de Type B lorsqu'on calcule v_{eff} par l'Équation (G.2b). Puisque la définition convenable du nombre de degrés de liberté admet que v , tel qu'il apparaît dans la loi de t , est une mesure de l'incertitude de la variance $s^2(\bar{z})$, on peut utiliser l'Équation (E.7) de E.4.3 pour définir le nombre de degrés de liberté v_i ,

$$v_i \approx \frac{1}{2} \frac{u^2(x_i)}{\sigma^2[u(x_i)]} \approx \frac{1}{2} \left[\frac{\Delta u(x_i)}{u(x_i)} \right]^{-2} \quad (\text{G.3})$$

La grandeur entre les grands crochets est l'incertitude relative de $u(x_i)$; pour une évaluation de Type B de l'incertitude-type, c'est une grandeur subjective dont la valeur s'obtient par un jugement scientifique fondé sur l'ensemble des informations disponibles.

EXEMPLE D'après ce que l'on sait de la manière dont l'estimation d'entrée x_i et son incertitude-type $u(x_i)$ ont été évaluées, on est conduit à juger que la valeur de $u(x_i)$ est fiable à environ 25 pour-cent. Cela peut être considéré comme

signifiant que l'incertitude relative est $\Delta u(x_i)/u(x_i) = 0,25$ et en conséquence, à partir de l'Équation (G.3), que $v_i = (0,25)^{-2}/2 = 8$. Si l'on estimait que la valeur de $u(x_i)$ est fiable à 50 pour-cent seulement, v_i serait alors égal à 2. (Voir aussi Tableau E.1 de l'Annexe E.)

G.4.3 Dans la présentation de 4.3 et 4.4 pour l'évaluation de Type B de l'incertitude-type à partir d'une loi de probabilité a priori, on a supposé implicitement que la valeur de $u(x_i)$ résultant d'une telle évaluation est exactement connue. Par exemple, lorsque $u(x_i)$ est obtenu à partir d'une loi de probabilité rectangulaire de demi-largeur supposée $a = (a_+ - a_-)/2$ comme en 4.3.7 et 4.4.5, $u(x_i) = a/\sqrt{3}$ est considéré comme une constante sans incertitude parce que c'est ainsi que l'on considère a_+ et a_- , et en conséquence a (mais voir 4.3.9, Note 2). Cela entraîne, à partir de l'Équation (G.3), que $v_i \rightarrow \infty$ ou $1/v_i \rightarrow 0$, mais cela n'entraîne pas de difficulté pour l'évaluation de l'Équation (G.2b). De plus, le fait de supposer que $v_i \rightarrow \infty$ n'est pas nécessairement irréaliste; il est de pratique courante de choisir a_- et a_+ de telle sorte que la probabilité pour que la grandeur en cause soit située en dehors de l'intervalle de a_- à a_+ soit extrêmement faible.

G.5 Autres considérations

G.5.1 Une expression, trouvée dans la littérature sur l'incertitude de mesure et souvent utilisée pour obtenir une incertitude supposée fournir un intervalle ayant un niveau de confiance de 95 pour-cent, peut s'écrire

$$U'_{95} = \left[t_{95}^2(v'_{\text{eff}}) s^2 + 3u^2 \right]^{1/2} \quad (\text{G.4})$$

$t_{95}(v'_{\text{eff}})$ correspond ici à la loi de t pour v'_{eff} degrés de liberté et $p = 95$ pour-cent; v'_{eff} est le nombre effectif de degrés de liberté calculé à partir de la formule de Welch-Satterthwaite [Équation (G.2b)] en prenant *seulement* en compte les composantes d'incertitude-type s_i qui ont été évaluées statistiquement à partir d'observations répétées dans le mesurage *en cours*; $s^2 = \sum c_i^2 s_i^2$; $c_i \equiv \partial f / \partial x_i$; et $u^2 = \sum u_j^2(y) = \sum c_j^2 (a_j^2/3)$ compte pour *toutes* les autres composantes d'incertitude, avec $+a_j$ et $-a_j$ limites supérieure et inférieure de X_j supposées exactement connues, par rapport à sa meilleure estimation x_j (c'est-à-dire, $x_j - a_j \leq X_j \leq x_j + a_j$).

NOTE Une composante fondée sur des observations répétées qui auraient été faites *en dehors* du mesurage en cours est traitée de la même façon que toute autre composante incluse dans u^2 . On supposera dorénavant que de telles composantes, si elles sont présentes, sont négligeables pour pouvoir faire une comparaison significative entre l'Équation (G.4) et l'Équation (G.5) du paragraphe suivant.

G.5.2 Si l'on évalue selon les méthodes recommandées en G.3 et G.4 une incertitude élargie qui fournit un intervalle de niveau de confiance de 95 pour-cent, l'expression résultante qui remplace l'Équation (G.4) est

$$U_{95} = t_{95}(v_{\text{eff}}) (s^2 + u^2)^{1/2} \quad (\text{G.5})$$

où v_{eff} est calculé à partir de l'Équation (G.2b) et où le calcul inclut *toutes* les composantes d'incertitude.

Dans la plupart des cas, la valeur de U_{95} obtenue par l'Équation (G.5) sera plus grande que la valeur de U'_{95} obtenue par l'Équation (G.4) si l'on suppose que, lors de l'évaluation de l'Équation (G.5), toutes les variances de Type B sont obtenues à partir de lois rectangulaires a priori avec des demi-largeurs qui sont les mêmes que les limites a_j utilisées pour calculer u^2 dans l'Équation (G.4). Cela peut être compris en constatant que, bien que $t_{95}(v'_{\text{eff}})$ soit la plupart du temps quelque peu plus grand que $t_{95}(v_{\text{eff}})$, les deux facteurs sont proches de 2, et que dans l'Équation (G.5) u^2 est multiplié par $t_p^2(v_{\text{eff}}) \approx 4$ alors que dans l'Équation (G.4) il est multiplié par 3. Bien que les deux expressions donnent des valeurs égales pour U'_{95} et U_{95} lorsque $u^2 \ll s^2$, U'_{95} sera inférieur à U_{95} jusqu'à atteindre 13 pour-cent de sa valeur lorsque $u^2 \gg s^2$. Ainsi, l'Équation (G.4) donne en général une incertitude qui fournit un intervalle ayant un niveau de confiance *plus faible* que l'intervalle fourni par l'incertitude élargie calculée à partir de l'Équation (G.5).

NOTE 1 Aux limites $u^2/s^2 \rightarrow \infty$ et $v_{\text{eff}} \rightarrow \infty$, $U'_{95} \rightarrow 1,732u$ tandis que $U_{95} \rightarrow 1,960u$. Dans ce cas, U'_{95} fournit un intervalle ayant un niveau de confiance de 91,7 pour-cent seulement alors que U_{95} fournit un intervalle de 95 pour-cent. En pratique, on tend vers cette situation lorsque les composantes obtenues à partir d'estimations de limites supérieure et inférieure sont dominantes, importantes en nombre et donnent des valeurs comparables pour les $u_j^2(y) = c_j^2 a_j^2 / 3$.

NOTE 2 Pour une loi normale, le facteur d'élargissement $k = \sqrt{3} \approx 1,732$ fournit un intervalle avec un niveau de confiance $p = 91,673\ldots$ pour-cent. Cette valeur de p est robuste dans le sens que, comparée à toute autre valeur, elle est indépendante, de manière optimale, de petits écarts à la normalité des grandeurs d'entrée.

G.5.3 On peut avoir parfois une grandeur d'entrée X_i distribuée de manière asymétrique: les écarts par rapport à son espérance mathématique sont plus probables dans un sens que dans l'autre (voir 4.3.8). Bien que cela n'amène pas de différence pour l'évaluation de l'incertitude-type $u(x_i)$ de l'estimation x_i de X_i , donc de l'évaluation de $u_c(y)$, cela peut modifier la détermination de U .

Il est habituellement commode de donner un intervalle symétrique $Y = y \pm U$, sauf si l'intervalle est tel qu'il y ait une différence de coût entre les variations d'un signe et celles de l'autre. Si l'asymétrie de X_i entraîne seulement une faible asymétrie pour la loi de probabilité caractérisée par le résultat de mesure y et par son incertitude-type composée $u_c(y)$, la perte de probabilité obtenue d'un côté en donnant un intervalle symétrique est compensée par le gain en probabilité de l'autre côté. On peut, en alternative, donner un intervalle symétrique en probabilité (et donc asymétrique en U): la probabilité pour que Y soit situé en dessous de la limite inférieure $y - U_-$ est égale à la probabilité pour que Y soit situé au-dessus de la limite supérieure $y + U_+$. Mais pour donner de telles limites, il faut fournir davantage d'information que les seules estimations y et $u_c(y)$ [et, en conséquence, plus d'information que les seules estimations x_i et $u(x_i)$ de chaque grandeur d'entrée X_i].

G.5.4 L'évaluation de l'incertitude élargie U_p donnée ici en fonction de $u_c(y)$, v_{eff} , et du facteur $t_p(v_{\text{eff}})$ de la loi de t est seulement une approximation et elle a ses limitations. La loi de $(y - Y)/u_c(y)$ suit une loi de t seulement si la loi de Y est normale, si l'estimation y et son incertitude-type composée $u_c(y)$ sont indépendantes et si la loi de $u_c^2(y)$ est une loi de χ^2 . L'introduction de v_{eff} , Équation (G.2b), correspond seulement au dernier problème et fournit une loi de χ^2 approchée pour $u_c^2(y)$; l'autre partie du problème, qui provient de la non-normalité de la loi de Y , nécessite de prendre en compte, en plus de la variance, des moments de degré plus élevé.

G.6 Résumé et conclusions

G.6.1 Le facteur d'élargissement k_p qui fournit un intervalle ayant un niveau de confiance p proche d'un niveau spécifié ne peut être trouvé que si l'on dispose d'une connaissance étendue de la loi de probabilité de chaque grandeur d'entrée et si ces lois sont composées pour obtenir la loi de la grandeur de sortie. Les estimations d'entrée x_i et leurs incertitudes-types $u(x_i)$ sont par elles-mêmes insuffisantes pour atteindre cet objectif.

G.6.2 Parce que les calculs volumineux nécessaires pour composer les lois de probabilité sont rarement justifiés par l'étendue et la fiabilité de l'information disponible, on peut accepter une approximation de la loi de la grandeur de sortie. En raison du théorème central limite, il est habituellement suffisant de supposer que la loi de probabilité de $(y - Y)/u_c(y)$ est la loi de t et de prendre $k_p = t_p(v_{\text{eff}})$, avec le facteur t fondé sur un nombre de degrés de liberté v_{eff} de $u_c(y)$ obtenu à partir de la formule de Welch-Satterthwaite, Équation (G.2b).

G.6.3 L'obtention de v_{eff} de l'Équation (G.2b) nécessite de connaître le nombre de degrés de liberté v_i de chaque composante de l'incertitude-type. Pour une composante obtenue par une évaluation de Type A, v_i est obtenu par le nombre d'observations répétées indépendantes sur lesquelles est fondée l'estimation d'entrée correspondante et par le nombre de grandeurs indépendantes déterminées à partir de ces observations (voir G.3.3). Pour une composante obtenue par une évaluation de Type B, v_i est obtenu à partir de la fiabilité que l'on peut attacher à la valeur de cette composante [voir G.4.2 et Équation (G.3)].

G.6.4 La séquence suivante est alors un résumé de la méthode préférentielle qui permet de calculer une incertitude élargie $U_p = k_p u_c(y)$ dans le but de fournir un intervalle $Y = y \pm U_p$ ayant un niveau de confiance approximatif p :

- 1) Déterminer y et $u_c(y)$ comme indiqué aux Articles 4 et 5.
- 2) Calculer v_{eff} à partir de la formule de Welch-Satterthwaite, Équation (G.2b) (reproduite ci-après pour la commodité):

$$v_{\text{eff}} = \frac{u_c^4(y)}{\sum_{i=1}^N \frac{u_i^4(y)}{v_i}} \quad (\text{G.2b})$$

Si $u(x_i)$ est obtenu par une évaluation de Type A, déterminer v_i comme précisé en [G.3.3](#). Si $u(x_i)$ est obtenu par une évaluation de Type B et si l'on peut le traiter comme s'il était connu exactement, ce qui est souvent le cas en pratique, $v_i \rightarrow \infty$; sinon, estimer v_i par l'Équation [\(G.3\)](#).

- 3) Déterminer le facteur $t_p(v_{\text{eff}})$ pour le niveau de confiance désiré p à partir du Tableau [G.2](#). Si v_{eff} n'est pas un entier, interpoler ou faire une troncature de v_{eff} à l'entier inférieur le plus proche.
- 4) Prendre $k_p = t_p(v_{\text{eff}})$ et calculer $U_p = k_p u_c(y)$.

G.6.5 Dans certaines situations, qui ne devraient pas se produire trop fréquemment en pratique, les conditions exigées par le théorème central limite peuvent ne pas être satisfaites correctement et l'approche de [G.6.4](#) peut conduire à un résultat inacceptable. Par exemple, si $u_c(y)$ est borné par une composante d'incertitude évaluée à partir d'une loi rectangulaire dont les limites sont supposées être exactement connues, il est possible [si $t_p(v_{\text{eff}}) > \sqrt{3}$] que $y + U_p$ et $y - U_p$, limites supérieure et inférieure de l'intervalle défini par U_p , puissent se situer en dehors des limites de la loi de probabilité de la grandeur de sortie Y . On doit traiter individuellement de tels cas, qui sont souvent justiciables d'un traitement analytique par approximation (impliquant, par exemple, la convolution d'une loi normale avec une loi rectangulaire [\[10\]](#)).

G.6.6 Pour de nombreux mesurages pratiques dans une large étendue de domaines, les conditions suivantes prédominent:

- l'estimation y du mesurande Y est obtenue à partir des estimations x_i d'un nombre significatif de grandeurs d'entrée X_i qui peuvent être décrites par des lois de probabilité raisonnables telles que des lois normales ou rectangulaires;
- les incertitudes-types $u(x_i)$ de ces estimations, qui peuvent être obtenues par des évaluations de Type A ou de Type B, contribuent de manière comparable à l'incertitude-type composée $u_c(y)$ du résultat de mesure y ;
- l'approximation linéaire supposée par la loi de propagation de l'incertitude est convenable (voir [5.1.2](#) et [E.3.1](#));
- l'incertitude de $u_c(y)$ est raisonnablement faible parce que son nombre effectif de degrés de liberté v_{eff} est significativement élevé, disons supérieur à 10.

Dans ces conditions, on peut supposer que la loi de probabilité caractérisée par le résultat de mesure et son incertitude-type composée est normale en raison du théorème central limite; et $u_c(y)$ peut être considéré comme une estimation raisonnablement fiable de l'écart-type de cette loi normale en raison de la valeur significativement élevée de v_{eff} . Alors, en se fondant sur les développements présentés dans cette annexe, y compris ceux qui mettent en évidence la nature approximative du processus d'évaluation de l'incertitude et sur le fait qu'il serait illusoire de vouloir distinguer entre des intervalles ayant des niveaux de confiance qui diffèrent de un à deux pour-cent, on peut faire ce qui suit:

- prendre $k = 2$ et supposer que $U = 2u_c(y)$ définit un intervalle ayant un niveau de confiance d'environ 95 pour-cent;

ou, pour des applications plus critiques,

- prendre $k = 3$ et supposer que $U = 3u_c(y)$ définit un intervalle ayant un niveau de confiance d'environ 99 pour-cent.

Cette approche devrait convenir à de nombreux mesurages courants; cependant son applicabilité à un mesurage particulier dépendra de la manière dont $k = 2$ sera proche de $t_{95}(v_{\text{eff}})$ ou $k = 3$ de $t_{99}(v_{\text{eff}})$; c'est-à-dire de la manière dont le niveau de confiance de l'intervalle défini par $U = 2u_c(y)$ ou $U = 3u_c(y)$ sera proche respectivement de 95 pour-cent ou de 99 pour-cent. Bien que pour $v_{\text{eff}} = 11$, $k = 2$ et $k = 3$ sous-estiment $t_{95}(11)$ et $t_{99}(11)$ de, respectivement environ 10 pour-cent et 4 pour-cent seulement (voir Tableau [G.2](#)), cela peut ne pas être acceptable dans certains cas. De plus, pour toutes les valeurs de v_{eff} un tant soit peu supérieures à 13, $k = 3$ conduit à un intervalle de niveau de confiance supérieur à 99 pour-cent. (Voir Tableau [G.2](#), qui montre aussi que pour $v_{\text{eff}} \rightarrow \infty$ les niveaux de confiance des intervalles produits par $k = 2$ et $k = 3$ sont respectivement de 95,45 pour-cent et 99,73 pour-cent.) Ainsi, en pratique, c'est la valeur de v_{eff} et ce qu'on attend de l'incertitude élargie qui déterminera si cette approche peut être utilisée.

Tableau G.2 — Valeur de $t_p(v)$ de la loi de t pour v degrés de liberté, qui définit un intervalle de $-t_p(v)$ à $+t_p(v)$ comprenant la fraction p de la loi

Nombre de degrés de liberté v	Fraction p en pourcentage					
	68,27 ^{a)}	90	95	95,45 ^{a)}	99	99,73 ^{a)}
1	1,84	6,31	12,71	13,97	63,66	235,80
2	1,32	2,92	4,30	4,53	9,92	19,21
3	1,20	2,35	3,18	3,31	5,84	9,22
4	1,14	2,13	2,78	2,87	4,60	6,62
5	1,11	2,02	2,57	2,65	4,03	5,51
6	1,09	1,94	2,45	2,52	3,71	4,90
7	1,08	1,89	2,36	2,43	3,50	4,53
8	1,07	1,86	2,31	2,37	3,36	4,28
9	1,06	1,83	2,26	2,32	3,25	4,09
10	1,05	1,81	2,23	2,28	3,17	3,96
11	1,05	1,80	2,20	2,25	3,11	3,85
12	1,04	1,78	2,18	2,23	3,05	3,76
13	1,04	1,77	2,16	2,21	3,01	3,69
14	1,04	1,76	2,14	2,20	2,98	3,64
15	1,03	1,75	2,13	2,18	2,95	3,59
16	1,03	1,75	2,12	2,17	2,92	3,54
17	1,03	1,74	2,11	2,16	2,90	3,51
18	1,03	1,73	2,10	2,15	2,88	3,48
19	1,03	1,73	2,09	2,14	2,86	3,45
20	1,03	1,72	2,09	2,13	2,85	3,42
25	1,02	1,71	2,06	2,11	2,79	3,33
30	1,02	1,70	2,04	2,09	2,75	3,27
35	1,01	1,70	2,03	2,07	2,72	3,23
40	1,01	1,68	2,02	2,06	2,70	3,20
45	1,01	1,68	2,01	2,06	2,69	3,18
50	1,01	1,68	2,01	2,05	2,68	3,16
100	1,005	1,660	1,984	2,025	2,626	3,077
∞	1,000	1,645	1,960	2,000	2,576	3,000

a) Pour une grandeur z décrite par une loi normale d'espérance mathématique μ_z et d'écart-type σ , l'intervalle $\mu_z \pm k\sigma$ comprend respectivement $p = 68,27$ pour-cent, $95,45$ pour-cent et $99,73$ pour-cent de la loi pour $k = 1, 2$ et 3 .

Annexe H

Exemples

Cette annexe donne six exemples, [H.1](#) à [H.6](#), traités d'une manière très détaillée afin d'illustrer les principes fondamentaux présentés dans ce *Guide* pour l'évaluation et l'expression de l'incertitude de mesure. Avec les exemples donnés dans le corps principal du document et dans certaines autres annexes, ils devraient permettre aux utilisateurs de ce *Guide* de mettre ces principes en application dans leur propre travail.

Comme les exemples servent d'illustrations, il a fallu les simplifier. De plus, comme ces exemples et les données numériques correspondantes ont été choisis essentiellement pour démontrer les principes de ce *Guide*, ils ne doivent pas être nécessairement interprétés comme décrivant des mesurages réels. Les valeurs numériques sont utilisées telles qu'elles sont données mais, pour limiter les erreurs d'arrondissement, on a habituellement retenu pour les calculs intermédiaires un nombre de chiffres significatifs plus élevé que ce qui est transcrit. En conséquence, le résultat final d'un calcul impliquant plusieurs grandeurs peut différer légèrement du résultat auquel on pourrait s'attendre à partir des valeurs numériques données dans le texte pour ces grandeurs.

On a signalé dans des parties précédentes de ce *Guide* que la classification des méthodes utilisées pour évaluer les composantes de l'incertitude en Type A et Type B était uniquement affaire de commodité. Cette classification n'est pas nécessaire pour la détermination de l'incertitude-type composée ou de l'incertitude élargie d'un résultat de mesure parce que toutes les composantes de l'incertitude sont traitées de la même manière, quelle que soit la façon dont elles ont été évaluées (voir [3.3.4](#), [5.1.2](#) et [E.3.7](#)). Ainsi, dans les exemples, la méthode utilisée pour évaluer une composante particulière de l'incertitude n'est pas spécifiquement identifiée par son type. Cependant, la présentation montrera clairement si une composante est obtenue par une évaluation de Type A ou par une évaluation de Type B.

H.1 Étalonnage de calibres à bouts

Cet exemple démontre que, même pour un mesurage apparemment simple, on peut rencontrer des aspects subtils dans l'évaluation de l'incertitude.

H.1.1 Le problème du mesurage

La longueur d'un calibre à bouts de valeur nominale 50 mm est déterminée par comparaison avec un étalon connu, un calibre à bouts de même longueur nominale. On obtient directement la différence d de leurs longueurs par la comparaison des deux calibres à bouts:

$$d = l(1 + \alpha\theta) - l_S(1 + \alpha_S\theta_S) \quad (\text{H.1})$$

où

- | | |
|------------------------|---|
| l | est le mesurande, c'est-à-dire la longueur à 20 °C du calibre à bouts à étalonner; |
| l_S | est la longueur de l'étalon à 20 °C telle que donnée dans son certificat d'étalonnage; |
| α et α_S | sont, respectivement, les coefficients de dilatation thermique du calibre à étalonner et de l'étalon; |
| θ et θ_S | sont, respectivement, les écarts de température par rapport à la température de référence de 20 °C du calibre et de l'étalon. |

H.1.2 Modèle mathématique

À partir de l'Équation (H.1), le mesurande est donné par

$$l = \frac{l_S(1 + \alpha_S \theta_S) + d}{(1 + \alpha \theta)} = l_S + d + l_S(\alpha_S \theta_S - \alpha \theta) + \dots \quad (\text{H.2})$$

Si l'on écrit la différence de température entre le calibre à bouts à étalonner et l'étalon sous la forme $\delta\theta = \theta - \theta_S$, et la différence entre leurs coefficients de dilatation thermique $\delta\alpha = \alpha - \alpha_S$, l'Équation (H.2) devient

$$l = f(l_S, d, \alpha_S, \theta, \delta\alpha, \delta\theta) = l_S + d - l_S(\delta\alpha \cdot \theta + \alpha_S \cdot \delta\theta) \quad (\text{H.3})$$

Les différences $\delta\theta$ et $\delta\alpha$, mais non point leurs incertitudes, sont estimées être nulles; $\delta\alpha$, α_S , $\delta\theta$, et θ sont supposés être non corrélés. (Si le mesurande était exprimé en fonction des variables θ , θ_S , α et α_S , il serait nécessaire d'inclure la corrélation entre θ et θ_S , et entre α et α_S .)

On déduit donc de l'Équation (H.3) que l'estimation de la valeur du mesurande l peut être obtenue de l'expression simple $l_S + \bar{d}$, où l_S est la longueur de l'étalon à 20 °C telle que donnée dans son certificat d'étalonnage et d est estimé par $\bar{d}$, moyenne arithmétique de $n = 5$ observations répétées indépendantes. L'incertitude-type composée $u_c(l)$ de l est obtenue en appliquant l'Équation (H.3), comme présenté ci-dessous.

NOTE Dans cet exemple et dans les suivants, pour simplifier la notation, on utilise le même symbole pour une grandeur et pour son estimation.

H.1.3 Variances contributives

Le Tableau H.1 résume les aspects principaux de cet exemple tel qu'il est présenté dans ce paragraphe et dans les suivants.

Puisqu'on suppose que $\delta\alpha = 0$ et $\delta\theta = 0$, l'application de l'Équation (10) de 5.1.2 à l'Équation (H.3) donne

$$u_c^2(l) = c_S^2 u^2(l_S) + c_d^2 u^2(d) + c_{\alpha_S}^2 u^2(\alpha_S) + c_{\theta}^2 u^2(\theta) + c_{\delta\alpha}^2 u^2(\delta\alpha) + c_{\delta\theta}^2 u^2(\delta\theta) \quad (\text{H.4})$$

avec

$$c_S = \partial f / \partial l_S = 1 - (\delta\alpha \cdot \theta + \alpha_S \cdot \delta\theta) = 1$$

$$c_d = \partial f / \partial d = 1$$

$$c_{\alpha_S} = \partial f / \partial \alpha_S = -l_S \delta\theta = 0$$

$$c_{\theta} = \partial f / \partial \theta = -l_S \delta\alpha = 0$$

$$c_{\delta\alpha} = \partial f / \partial \delta\alpha = -l_S \theta$$

$$c_{\delta\theta} = \partial f / \partial \delta\theta = -l_S \alpha_S$$

et, en conséquence

$$u_c^2(l) = u^2(l_S) + u^2(d) + l_S^2 \theta^2 u^2(\delta\alpha) + l_S^2 \alpha_S^2 u^2(\delta\theta) \quad (\text{H.5})$$

H.1.3.1 Incertitude de l'étalonnage de l'étalon, $u(l_S)$

Le certificat d'étalonnage donne pour l'incertitude élargie de l'étalon $U = 0,075 \mu\text{m}$ et précise qu'elle a été obtenue par utilisation d'un facteur d'élargissement $k = 3$. L'incertitude-type est alors

$$u(l_S) = (0,075 \mu\text{m})/3 = 25 \text{ nm}$$

H.1.3.2 Incertitude de la différence mesurée entre les longueurs, $u(d)$

L'écart-type expérimental d'une mesure caractérisant la comparaison de l et l_S est fondé sur un ensemble de mesures; il a été déterminé à partir de la variabilité de 25 observations répétées indépendantes de la différence des longueurs entre deux calibres étalons à bouts et il a été trouvé égal à 13 nm. Dans la comparaison de cet exemple, on prend cinq observations répétées. L'incertitude-type associée à la moyenne arithmétique de ces lectures est alors (voir [4.2.4](#))

$$u(\bar{d}) = s(\bar{d}) = (13 \text{ nm})/\sqrt{5} = 5,8 \text{ nm}$$

Le certificat d'étalonnage du comparateur utilisé pour comparer l à l_S indique que son incertitude «due aux erreurs aléatoires» est de $\pm 0,01 \mu\text{m}$ à un niveau de confiance de 95 pour-cent et sur la base de 6 mesurages répétés; l'incertitude-type est alors, en utilisant le facteur t pour $\nu = 6 - 1 = 5$ degrés de liberté, $t_{95}(5) = 2,57$ (voir Annexe G, Tableau [G.2](#))

$$u(d_1) = (0,01 \mu\text{m})/2,57 = 3,9 \text{ nm}$$

L'incertitude du comparateur «due aux erreurs systématiques» est donnée dans le certificat comme étant égale à $0,02 \mu\text{m}$ au «niveau trois sigmas». L'incertitude-type due à cette cause peut donc être prise égale à

$$u(d_2) = (0,02 \mu\text{m})/3 = 6,7 \text{ nm}$$

La contribution totale est obtenue par la somme des variances estimées:

$$u^2(d) = u^2(\bar{d}) + u^2(d_1) + u^2(d_2) = 93 \text{ nm}^2$$

ou

$$u(d) = 9,7 \text{ nm}$$

H.1.3.3 Incertitude du coefficient de dilatation thermique, $u(\alpha_S)$

Le coefficient de dilatation thermique du calibre étalon à bouts est donné comme étant $\alpha_S = 11,5 \times 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ avec une incertitude représentée par une loi rectangulaire de limites $\pm 2 \times 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$. L'incertitude-type est alors [voir Équation (7) de [4.3.7](#)]

$$u(\alpha_S) = (2 \times 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1})/\sqrt{3} = 1,2 \times 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$$

Puisque $c_{\alpha_S} = \partial f / \partial \alpha_S = -l_S \delta \theta = 0$ comme indiqué en [H.1.3](#), cette incertitude n'a aucune contribution, au premier ordre, pour l'incertitude de l . Elle fournit cependant une contribution au second ordre qui est évaluée en [H.1.7](#).

Tableau H.1 — Résumé des composantes de l'incertitude-type

Composante de l'incertitude-type $u(x_i)$	Source de l'incertitude	Valeur de l'incertitude-type $u(x_i)$	$c_i \equiv \partial f / \partial x_i$	$u_i(l) \equiv c_i u(x_i)$ (nm)	Nombre de degrés de liberté
$u(l_S)$	Étalonnage du calibre étalon	25 nm	1	25	18
$u(d)$	Différence mesurée entre calibres	9,7 nm	1	9,7	25,6
$u(\bar{d})$	observations répétées	5,8 nm			24
$u(d_1)$	effets aléatoires du comparateur	3,9 nm			5
$u(d_2)$	effets systématiques du comparateur	6,7 nm			8
$u(\alpha_S)$	Coefficient de dilatation thermique du calibre étalon	$1,2 \times 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$	0	0	
$u(\theta)$	Température du banc d'essai	0,41 °C	0	0	
$u(\bar{\theta})$	température moyenne du banc	0,2 °C			
$u(\Delta)$	variation cyclique de température de la salle	0,35 °C			
$u(\delta\alpha)$	Différence entre les coefficients de dilatation des calibres	$0,58 \times 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$	$-l_S\theta$	2,9	50
$u(\delta\theta)$	Différence entre les températures des calibres	0,029 °C	$-l_S\alpha_S$	16,6	2
$u_c^2(l) = \sum u_i^2(l) = 1\,002 \text{ nm}^2$ $u_c(l) = 32 \text{ nm}$ $\nu_{\text{eff}}(l) = 16$					

H.1.3.4 Incertitude de l'écart de température du calibre à bouts, $u(\theta)$

La température du banc d'essai est indiquée comme étant $(19,9 \pm 0,5) \text{ }^\circ\text{C}$; la température au moment des observations individuelles n'a pas été enregistrée. Le décalage maximal donné, $\Delta = 0,5 \text{ }^\circ\text{C}$, est censé représenter l'amplitude d'une variation approximativement cyclique de la température dans un système thermostaté et non pas l'incertitude de la température moyenne. La valeur de l'écart moyen de température

$$\bar{\theta} = 19,9 \text{ }^\circ\text{C} - 20 \text{ }^\circ\text{C} = -0,1 \text{ }^\circ\text{C}$$

est indiquée comme ayant elle-même une incertitude-type due à l'incertitude sur la température moyenne du banc d'essai de

$$u(\bar{\theta}) = 0,2 \text{ }^\circ\text{C}$$

alors que la variation cyclique en fonction du temps produit une loi de température en forme de U (arcsinus) dont l'incertitude-type est

$$u(\Delta) = (0,5 \text{ }^\circ\text{C}) / \sqrt{2} = 0,35 \text{ }^\circ\text{C}$$

L'écart de température θ peut être pris égal à $\bar{\theta}$, et l'incertitude-type de θ est obtenue à partir de

$$u^2(\theta) = u^2(\bar{\theta}) + u^2(\Delta) = 0,165 \text{ °C}^2$$

ce qui donne

$$u(\theta) = 0,41 \text{ °C}$$

Puisque $c_\theta = \partial f / \partial \theta = -l_S \delta \alpha = 0$ comme indiqué en [H.1.3](#), cette incertitude ne contribue pas, elle non plus, à l'incertitude de l au premier ordre; mais elle fournit une contribution au second ordre qui est évaluée en [H.1.7](#).

H.1.3.5 Incertitude de la différence des coefficients de dilatation, $u(\delta \alpha)$

Les limites estimées sur la variabilité de $\delta \alpha$ sont $\pm 1 \times 10^{-6} \text{ °C}^{-1}$ avec, pour $\delta \alpha$, la même probabilité d'avoir n'importe quelle valeur entre ces limites. L'incertitude-type est

$$u(\delta \alpha) = (1 \times 10^{-6} \text{ °C}^{-1}) / \sqrt{3} = 0,58 \times 10^{-6} \text{ °C}^{-1}$$

H.1.3.6 Incertitude de la différence entre les températures des calibres, $u(\delta \theta)$

L'étalon et le calibre en essai sont supposés être à la même température, mais la différence de température peut se situer avec une probabilité égale à n'importe quel endroit dans l'intervalle estimé de $-0,05 \text{ °C}$ à $+0,05 \text{ °C}$. L'incertitude-type est

$$u(\delta \theta) = (0,05 \text{ °C}) / \sqrt{3} = 0,029 \text{ °C}$$

H.1.4 Incertitude-type composée

L'incertitude-type composée $u_c(l)$ est calculée à partir de l'Équation [\(H.5\)](#). Les termes individuels sont rassemblés et portés dans l'expression pour obtenir

$$u_c^2(l) = (25 \text{ nm})^2 + (9,7 \text{ nm})^2 + (0,05 \text{ m})^2 (-0,1 \text{ °C})^2 (0,58 \times 10^{-6} \text{ °C}^{-1})^2 + (0,05 \text{ m})^2 (11,5 \times 10^{-6} \text{ °C}^{-1})^2 (0,029 \text{ °C})^2 \quad (\text{H.6a})$$

$$= (25 \text{ nm})^2 + (9,7 \text{ nm})^2 + (2,9 \text{ nm})^2 + (16,6 \text{ nm})^2 = 1002 \text{ nm}^2 \quad (\text{H.6b})$$

ou

$$u_c(l) = 32 \text{ nm} \quad (\text{H.6c})$$

La composante dominante de l'incertitude est clairement celle de l'étalon, $u(l_S) = 25 \text{ nm}$.

H.1.5 Résultat final

Le certificat d'étalonnage pour le calibre étalon à bouts donne $l_S = 50,000\,623 \text{ mm}$ comme longueur à 20 °C . La moyenne arithmétique $\bar{d}$ des cinq observations répétées de la différence sur les longueurs entre le calibre inconnu et le calibre étalon est de 215 nm . Donc, puisque $l = l_S + \bar{d}$ (voir [H.1.2](#)), la longueur l du calibre inconnu à 20 °C est $50,000\,838 \text{ mm}$. En accord avec [7.2.2](#), le résultat final du mesurage peut être énoncé sous la forme:

$l = 50,000\,838 \text{ mm}$ avec une incertitude-type composée $u_c = 32 \text{ nm}$. L'incertitude-type composée relative correspondante est $u_c/l = 6,4 \times 10^{-7}$.

H.1.6 Incertitude élargie

Supposons qu'on recherche une incertitude élargie $U_{99} = k_{99}u_c(l)$ qui fournisse un intervalle correspondant à un niveau de confiance de 99 pour-cent environ. La procédure à utiliser est celle qui est résumée en [G.6.4](#), et le nombre de degrés de liberté nécessaire est indiqué dans le Tableau [H.1](#). On obtient cela comme suit:

- 1) *Incertitude de l'étalonnage de l'étalon, $u(l_S)$* [\[H.1.3.1\]](#). Le certificat d'étalonnage spécifie que le nombre effectif de degrés de liberté de l'incertitude-type composée qui a permis d'obtenir l'incertitude élargie indiquée est $\nu_{\text{eff}}(l_S) = 18$.
- 2) *Incertitude de la différence des longueurs mesurées, $u(d)$* [\[H.1.3.2\]](#). Bien que $\bar{d}$ ait été obtenu à partir de cinq observations répétées, mais parce que $u(\bar{d})$ a été obtenu à partir d'un écart-type expérimental fondé sur un ensemble de données résultant de 25 observations, le nombre de degrés de liberté de $u(\bar{d})$ est $\nu(\bar{d}) = 25 - 1 = 24$ (voir [H.3.6](#), [Note](#)). Le nombre de degrés de liberté de $u(d_1)$, incertitude due aux effets aléatoires sur le comparateur, est $\nu(d_1) = 6 - 1 = 5$ parce que d_1 a été obtenu à partir de 6 mesurages répétés. L'incertitude de $\pm 0,02 \mu\text{m}$ pour les effets systématiques sur le comparateur peut être supposée fiable à 25 pour-cent, et il en résulte que le nombre de degrés de liberté à partir de l'Équation [\(G.3\)](#) de [G.4.2](#) est $\nu(d_2) = 8$ (voir l'exemple de [G.4.2](#)). Le nombre effectif de degrés de liberté de $u(d)$, $\nu_{\text{eff}}(d)$, est alors obtenu à partir de l'Équation [\(G.2b\)](#) de [G.4.1](#):

$$\nu_{\text{eff}}(d) = \frac{\left[u^2(\bar{d}) + u^2(d_1) + u^2(d_2) \right]^2}{\frac{u^4(\bar{d})}{\nu(\bar{d})} + \frac{u^4(d_1)}{\nu(d_1)} + \frac{u^4(d_2)}{\nu(d_2)}} = \frac{(9,7 \text{ nm})^4}{\frac{(5,8 \text{ nm})^4}{24} + \frac{(3,9 \text{ nm})^4}{5} + \frac{(6,7 \text{ nm})^4}{8}} = 25,6$$

- 3) *Incertitude de la différence des coefficients de dilatation, $u(\delta\alpha)$* [\[H.1.3.5\]](#). Les limites estimées de $\pm 1 \times 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ sur la variabilité de $\delta\alpha$ sont jugées fiables à 10 pour-cent. Cela donne, à partir de l'Équation [\(G.3\)](#) de [G.4.2](#), $\nu(\delta\alpha) = 50$.
- 4) *Incertitude de la différence entre les températures des calibres, $u(\delta\theta)$* [\[H.1.3.6\]](#). L'intervalle estimé de $-0,05 \text{ }^\circ\text{C}$ à $+0,05 \text{ }^\circ\text{C}$ pour la différence de température $\delta\theta$ est jugé fiable seulement à 50 pour-cent, ce qui donne, à partir de l'Équation [\(G.3\)](#) de [G.4.2](#), $\nu(\delta\theta) = 2$.

Le calcul de $\nu_{\text{eff}}(l)$ à partir de l'Équation [\(G.2b\)](#) de [G.4.1](#) s'effectue exactement de la même façon que pour le calcul de $\nu_{\text{eff}}(d)$ en [2\)](#) ci-dessus. Donc, à partir des Équations [\(H.6b\)](#) et [\(H.6c\)](#) et des valeurs pour ν données de [1\)](#) à [4\)](#),

$$\nu_{\text{eff}}(l) = \frac{(32 \text{ nm})^4}{\frac{(25 \text{ nm})^4}{18} + \frac{(9,7 \text{ nm})^4}{25,6} + \frac{(2,9 \text{ nm})^4}{50} + \frac{(16,6 \text{ nm})^4}{2}} = 16,7$$

Pour obtenir l'incertitude élargie exigée, on arrondit tout d'abord cette valeur au nombre entier immédiatement inférieur $\nu_{\text{eff}}(l) = 16$. Il en résulte alors, à partir du Tableau [G.2](#) de l'Annexe [G](#), que $t_{99}(16) = 2,92$, et donc $U_{99} = t_{99}(16)u_c(l) = 2,92 \times (32 \text{ nm}) = 93 \text{ nm}$. Selon [7.2.4](#), le résultat final du mesurage peut être énoncé comme:

$l = (50,000\,838 \pm 0,000\,093) \text{ mm}$, où le nombre après le symbole $\pm$ est la valeur numérique d'une incertitude élargie $U = ku_c$, avec U déterminé à partir d'une incertitude-type composée $u_c = 32 \text{ nm}$ et d'un facteur d'élargissement $k = 2,92$ sur la base de la loi de t pour $\nu = 16$ degrés de liberté et où cette incertitude définit un intervalle estimé avoir un niveau de confiance de 99 pour-cent. L'incertitude élargie relative correspondante est $U/l = 1,9 \times 10^{-6}$.

H.1.7 Termes de deuxième ordre

La [Note](#) de [5.1.2](#) précise que l'Équation [\(10\)](#), utilisée dans cet exemple pour obtenir l'incertitude-type composée $u_c(l)$, doit être complétée lorsque la non-linéarité de la fonction $Y = f(X_1, X_2, \dots, X_N)$ est

suffisamment significative pour ne pas pouvoir négliger les termes de degré plus élevé dans le développement en série de Taylor. C'est le cas dans cet exemple et il en résulte que l'évaluation de $u_c(l)$ présentée jusqu'à maintenant n'est pas complète. En appliquant l'expression donnée en [Note](#) de [5.1.2](#) à l'Équation [\(H.3\)](#) on obtient en fait deux termes du second ordre, non négligeables, distincts, à ajouter à l'Équation [\(H.5\)](#). Ces termes, qui proviennent du terme quadratique dans l'expression de la [Note](#), sont

$$l_S^2 u^2(\delta\alpha) u^2(\theta) + l_S^2 u^2(\alpha_S) u^2(\delta\theta)$$

mais le premier seulement de ces termes contribue significativement à $u_c(l)$:

$$l_S u(\delta\alpha) u(\theta) = (0,05 \text{ m}) (0,58 \times 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}) (0,41 \text{ }^\circ\text{C}) = 11,7 \text{ nm}$$

$$l_S u(\alpha_S) u(\delta\theta) = (0,05 \text{ m}) (1,2 \times 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}) (0,029 \text{ }^\circ\text{C}) = 1,7 \text{ nm}$$

Les termes de deuxième ordre font croître $u_c(l)$ de 32 nm à 34 nm.

H.2 Mesurage simultané d'une résistance et d'une réactance

Cet exemple montre comment traiter des mesurandes multiples ou des grandeurs de sortie déterminées simultanément lors du même mesurage, ainsi que la corrélation entre leurs estimations. Il prend seulement en considération les variations aléatoires des observations; dans la pratique réelle, les incertitudes des corrections pour les effets systématiques devraient aussi contribuer à l'incertitude des résultats de mesure. Les données sont analysées de deux manières différentes qui conduisent essentiellement aux mêmes valeurs numériques.

H.2.1 Le problème de mesure

On détermine la résistance R et la réactance X d'un élément de circuit par la mesure de l'amplitude V d'une différence de potentiel sinusoïdale entre ses bornes, de l'intensité I du courant alternatif qui le traverse et du déphasage ϕ entre la différence de potentiel alternative et le courant alternatif. Il en résulte que les trois grandeurs d'entrée sont V , I , et ϕ et que les trois grandeurs de sortie — les mesurandes — sont les trois composantes de l'impédance R , X , et Z . Puisque $Z^2 = R^2 + X^2$, il y a seulement deux grandeurs de sortie indépendantes.

H.2.2 Modèle mathématique et données

Les mesurandes sont reliés aux grandeurs d'entrée par la loi d'Ohm:

$$R = \frac{V}{I} \cos \phi; \quad X = \frac{V}{I} \sin \phi; \quad Z = \frac{V}{I} \quad (\text{H.7})$$

On considère qu'on a obtenu cinq ensembles indépendants d'observations simultanées des trois grandeurs d'entrée V , I , et ϕ dans des conditions analogues (voir [B.2.15](#)), et il en résulte les données présentées dans le [Tableau H.2](#). Le tableau donne aussi les moyennes arithmétiques des observations et les écarts-types expérimentaux de ces moyennes, calculés par les Équations [\(3\)](#) et [\(5\)](#) en [4.2](#). Les moyennes sont considérées comme les meilleures estimations des valeurs attendues des grandeurs d'entrée et les écarts-types expérimentaux sont les incertitudes-types de ces moyennes.

Parce qu'elles sont obtenues à partir d'observations simultanées, les moyennes $\bar{V}$, $\bar{I}$ et $\bar{\phi}$ sont corrélées et on doit tenir compte des corrélations dans l'évaluation des incertitudes-types des mesurandes R , X et Z . Les coefficients de corrélation nécessaires sont facilement obtenus à partir de l'Équation [\(14\)](#) de [5.2.2](#) en utilisant les valeurs de $s(\bar{V}, \bar{I})$, $s(\bar{V}, \bar{\phi})$ et $s(\bar{I}, \bar{\phi})$ calculées à partir de l'Équation [\(17\)](#) de [5.2.3](#). Les résultats sont inclus dans le [Tableau H.2](#), et on doit se rappeler que $r(x_i, x_j) = r(x_j, x_i)$ et que $r(x_i, x_i) = 1$.

Tableau H.2 — Valeurs des grandeurs d'entrée V , I , et ϕ obtenues à partir de cinq ensembles d'observations simultanées

Numéro de l'ensemble k	Grandeurs d'entrée		
	V (V)	I (mA)	ϕ (rad)
1	5,007	19,663	1,045 6
2	4,994	19,639	1,043 8
3	5,005	19,640	1,046 8
4	4,990	19,685	1,042 8
5	4,999	19,678	1,043 3
Moyenne arithmétique	$\bar{V} = 4,999\ 0$	$\bar{I} = 19,661\ 0$	$\bar{\phi} = 1,044\ 46$
Écart-type expérimental de la moyenne	$s(\bar{V}) = 0,003\ 2$	$s(\bar{I}) = 0,009\ 5$	$s(\bar{\phi}) = 0,000\ 75$
Coefficients de corrélation			
$r(\bar{V}, \bar{I}) = -0,36$			
$r(\bar{V}, \bar{\phi}) = 0,86$			
$r(\bar{I}, \bar{\phi}) = -0,65$			

H.2.3 Résultats: approche n° 1

L'approche n° 1 est résumée dans le Tableau [H.3](#).

Les valeurs des trois mesurandes R , X et Z sont obtenues à partir des relations données dans l'Équation [\(H.7\)](#) en utilisant les valeurs moyennes $\bar{V}$, $\bar{I}$ et $\bar{\phi}$ de V , I et ϕ , données dans le Tableau [H.2](#). Les incertitudes-types de R , X et Z sont obtenues à partir de l'Équation [\(16\)](#) de [5.2.2](#) puisque, comme déjà indiqué ci-dessus, les grandeurs d'entrée $\bar{V}$, $\bar{I}$ et $\bar{\phi}$ sont corrélées. Par exemple, considérons $Z = \bar{V}/\bar{I}$. En identifiant $\bar{V}$ à x_1 , $\bar{I}$ à x_2 et f à $Z = \bar{V}/\bar{I}$, l'Équation [\(16\)](#) de [5.2.2](#) donne, pour l'incertitude-type composée de Z

$$u_c^2(Z) = \left(\frac{1}{\bar{I}}\right)^2 u^2(\bar{V}) + \left(\frac{\bar{V}}{\bar{I}^2}\right)^2 u^2(\bar{I}) + 2\left(\frac{1}{\bar{I}}\right)\left(-\frac{\bar{V}}{\bar{I}^2}\right) u(\bar{V})u(\bar{I})r(\bar{V}, \bar{I}) \quad (\text{H.8a})$$

$$= Z^2 \left[\frac{u(\bar{V})}{\bar{V}} \right]^2 + Z^2 \left[\frac{u(\bar{I})}{\bar{I}} \right]^2 - 2Z^2 \left[\frac{u(\bar{V})}{\bar{V}} \right] \left[\frac{u(\bar{I})}{\bar{I}} \right] r(\bar{V}, \bar{I}) \quad (\text{H.8b})$$

ou

$$u_{c,r}^2(\bar{Z}) = u_r^2(\bar{V}) + u_r^2(\bar{I}) - 2u_r(\bar{V})u_r(\bar{I})r(\bar{V}, \bar{I}) \quad (\text{H.8c})$$

où $u(\bar{V}) = s(\bar{V})$, $u(\bar{I}) = s(\bar{I})$, et où l'indice «r» dans la dernière expression signifie que u est une incertitude relative. En substituant les valeurs appropriées du Tableau [H.2](#) dans l'Équation [\(H.8a\)](#) on obtient $u_c(Z) = 0,236\ \Omega$.

Parce que les trois mesurandes ou grandeurs de sortie dépendent des mêmes grandeurs d'entrée, ils sont eux aussi corrélés. Les éléments de la matrice de covariance qui décrit cette corrélation peuvent, dans le cas le plus général, s'écrire

$$u(y_l, y_m) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{\partial y_l}{\partial x_i} \frac{\partial y_m}{\partial x_j} u(x_i)u(x_j)r(x_i, x_j) \quad (\text{H.9})$$

où $y_l = f_l(x_1, x_2, \dots, x_N)$ et $y_m = f_m(x_1, x_2, \dots, x_N)$. L'Équation (H.9) est une généralisation de l'Équation (F.2) de F.1.2.3 lorsque les q_l de cette expression sont corrélés. Les coefficients de corrélation estimés des grandeurs de sortie sont donnés par $r(y_l, y_m) = u(y_l, y_m) / (u(y_l)u(y_m))$, comme indiqué dans l'Équation (14) de 5.2.2. On doit noter que les éléments diagonaux de la matrice de covariance $u(y_l, y_l) \equiv u^2(y_l)$ sont les variances estimées des grandeurs de sortie y_l (voir 5.2.2, note 2) et que pour $m = l$, l'Équation (H.9) est identique à l'Équation (16) de 5.2.2.

Pour appliquer l'Équation (H.9) à cet exemple, on procède aux identifications suivantes:

$$\begin{array}{lll} y_1 = R & x_1 = \bar{V} & u(x_i) = s(x_i) \\ y_2 = X & x_2 = \bar{I} & N = 3 \\ y_3 = Z & x_3 = \bar{\phi} & \end{array}$$

Les résultats des calculs pour R , X et Z et pour leurs variances estimées et leurs coefficients de corrélation estimés sont donnés dans le Tableau H.3.

Tableau H.3 — Valeurs calculées des grandeurs de sortie R , X et Z : approche n° 1

Indice du mesurande l	Relation entre l'estimation du mesurande y_l et les estimations d'entrée x_i	Valeur de l'estimation y_l (résultat de mesure)	Incertitude-type composée $u_c(y_l)$ du résultat de mesure
1	$y_1 = R = (\bar{V} / \bar{I}) \cos \bar{\phi}$	$y_1 = R = 127,732 \, \Omega$	$u_c(R) = 0,071 \, \Omega$ $u_c(R)/R = 0,06 \times 10^{-2}$
2	$y_2 = X = (\bar{V} / \bar{I}) \sin \bar{\phi}$	$y_2 = X = 219,847 \, \Omega$	$u_c(X) = 0,295 \, \Omega$ $u_c(X)/X = 0,13 \times 10^{-2}$
3	$y_3 = Z = \bar{V} / \bar{I}$	$y_3 = Z = 254,260 \, \Omega$	$u_c(Z) = 0,236 \, \Omega$ $u_c(Z)/Z = 0,09 \times 10^{-2}$
Coefficients de corrélation $r(y_l, y_m)$			
$r(y_1, y_2) = r(R, X) = -0,588$			
$r(y_1, y_3) = r(R, Z) = -0,485$			
$r(y_2, y_3) = r(X, Z) = 0,993$			

H.2.4 Résultats: approche n° 2

L'approche n° 2 est résumée dans le Tableau H.4.

Puisque les données ont été obtenues sous la forme de cinq ensembles d'observations des trois grandeurs d'entrée V , I et ϕ , il est possible de calculer une valeur pour R , X et Z pour *chaque ensemble* de données d'entrée, puis de prendre la moyenne arithmétique des cinq valeurs individuelles pour obtenir les meilleures estimations de R , X et Z . L'écart-type expérimental de chaque moyenne (qui est son incertitude-type composée) est alors calculé à partir des cinq valeurs individuelles de la manière habituelle [Équation (5) de 4.2.3] et les covariances estimées des trois moyennes sont calculées en appliquant directement l'Équation (17) de 5.2.3 aux cinq valeurs individuelles ayant permis d'obtenir chaque moyenne. Il n'y a pas de différence pour les valeurs de sortie, les incertitudes-types et les covariances estimées fournies par les deux approches, excepté pour les effets du second ordre dus à ce que les termes tels que $\bar{V} / \bar{I}$ et $\cos \bar{\phi}$ sont remplacés par V / I et $\cos \phi$.

Pour montrer cette approche, le Tableau H.4 donne les valeurs de R , X et Z calculées pour chacun des cinq ensembles d'observations. Les moyennes arithmétiques, les incertitudes-types et les coefficients de corrélation estimés sont alors directement calculés à partir de ces valeurs individuelles. La différence entre les valeurs numériques obtenues de cette façon et les résultats donnés dans le Tableau H.3 est négligeable.

Tableau H.4 — Valeurs calculées des grandeurs de sortie R , X et Z : approche n° 2

Numéro de l'ensemble k	Valeurs individuelles des mesurandes		
	$R = (V/I) \cos \phi$ (Ω)	$X = (V/I) \sin \phi$ (Ω)	$Z = V/I$ (Ω)
1	127,67	220,32	254,64
2	127,89	219,79	254,29
3	127,51	220,64	254,84
4	127,71	218,97	253,49
5	127,88	219,51	254,04
Moyenne arithmétique	$y_1 = \bar{R} = 127,732$	$y_2 = \bar{X} = 219,847$	$y_3 = \bar{Z} = 254,260$
Écart-type expérimental de la moyenne	$s(\bar{R}) = 0,071$	$s(\bar{X}) = 0,295$	$s(\bar{Z}) = 0,236$
Coefficients de corrélation $r(y_l, y_m)$			
$r(y_1, y_2) = r(\bar{R}, \bar{X}) = -0,588$			
$r(y_1, y_3) = r(\bar{R}, \bar{Z}) = -0,485$			
$r(y_2, y_3) = r(\bar{X}, \bar{Z}) = 0,993$			

Selon la terminologie de la [Note](#) de [4.1.4](#), l'approche n° 2 est un exemple d'obtention de l'estimation y à partir de $\bar{Y} = \left(\sum_{k=1}^n Y_k \right) / n$, tandis que l'approche n° 1 est un exemple d'obtention de y à partir de $y = f(\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_N)$. Comme précisé dans cette note, les deux approches donneront en général des résultats *identiques* si f est une fonction linéaire de ses grandeurs d'entrée (sous réserve que les coefficients de corrélation observés expérimentalement soient pris en compte lors de l'application de l'approche n° 1). Si f n'est pas une fonction linéaire, les résultats de l'approche n° 1 différeront alors de ceux de l'approche n° 2 selon le degré de non-linéarité et en fonction des variances et covariances estimées des X_i . On peut s'en rendre compte à partir de l'expression

$$y = f(\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_N) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{\partial^2 f}{\partial \bar{X}_i \partial \bar{X}_j} u(\bar{X}_i, \bar{X}_j) + \dots \quad (\text{H.10})$$

où le second terme de la partie droite de l'équation est le terme de deuxième ordre dans le développement en série de Taylor de f en fonction des $\bar{X}_i$ (voir aussi [5.1.2](#), [Note](#)). Dans le cas présent, l'approche n° 2 est préférable parce qu'elle évite l'approximation $y = f(\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_N)$ et reflète mieux la procédure de mesure utilisée — les données ont, effectivement, été recueillies sous forme d'ensembles.

En sens inverse, l'approche n° 2 serait inappropriée si les données du [Tableau H.2](#) représentaient $n_1 = 5$ observations de la différence de potentiel V , suivies par $n_2 = 5$ observations du courant I , suivies enfin par $n_3 = 5$ observations de la phase ϕ , cette approche serait d'ailleurs impossible avec $n_1 \neq n_2 \neq n_3$. (C'est vraiment une médiocre façon de procéder au mesurage puisque la différence de potentiel et le courant sont directement dépendants, pour une impédance déterminée.)

Si les données du [Tableau H.2](#) sont réinterprétées de cette manière, de sorte que l'approche n° 2 soit inappropriée et si les corrélations entre les grandeurs V , I et ϕ sont supposées absentes, alors les coefficients de corrélation observés n'ont pas de signification et doivent être pris égaux à zéro. Si cela est fait dans le [Tableau H.2](#), l'Équation [\(H.9\)](#) se réduit à l'équivalent de l'Équation [\(F.2\)](#) de [F.1.2.3](#), c'est-à-dire

$$u(y_l, y_m) = \sum_{i=1}^N \frac{\partial y_l}{\partial x_i} \frac{\partial y_m}{\partial x_i} u^2(x_i) \quad (\text{H.11})$$

et son application aux données du Tableau H.2 entraîne des modifications au Tableau H.3 indiquées dans le Tableau H.5.

Tableau H.5 — Modifications au Tableau H.3, avec l'hypothèse que les coefficients de corrélation du Tableau H.2 sont nuls

Incertitude-type composée $u_c(y_i)$ du résultat de mesure
$u_c(R) = 0,195 \, \Omega$ $u_c(R)/R = 0,15 \times 10^{-2}$
$u_c(X) = 0,201 \, \Omega$ $u_c(X)/X = 0,09 \times 10^{-2}$
$u_c(Z) = 0,204 \, \Omega$ $u_c(Z)/Z = 0,08 \times 10^{-2}$
Coefficients de corrélation $r(y_i, y_m)$
$r(y_1, y_2) = r(R, X) = 0,056$ $r(y_1, y_3) = r(R, Z) = 0,527$ $r(y_2, y_3) = r(X, Z) = 0,878$

H.3 Étalonnage d'un thermomètre

Cet exemple illustre l'utilisation de la méthode des moindres carrés pour obtenir une droite d'étalonnage et la manière dont les paramètres de l'ajustement, pente et ordonnée à l'origine, et leurs variance et covariance estimées, sont utilisés pour obtenir, à partir de la droite, la valeur et l'incertitude-type d'une correction prédite.

H.3.1 Le problème de mesure

Un thermomètre est étalonné par comparaison de $n = 11$ lectures de température t_k du thermomètre, chacune ayant une incertitude négligeable, aux températures de référence correspondantes $t_{R,k}$ connues, dans la plage de température de 21 °C à 27 °C, pour obtenir les corrections $b_k = t_{R,k} - t_k$ sur les lectures. Les corrections *mesurées* b_k et les températures *mesurées* t_k sont les grandeurs d'entrée de l'évaluation. Une droite d'étalonnage

$$b(t) = y_1 + y_2(t - t_0) \quad (\text{H.12})$$

est ajustée par la méthode des moindres carrés aux corrections et températures mesurées. Les paramètres y_1 et y_2 , qui sont respectivement l'ordonnée à l'origine et la pente de la droite d'étalonnage, sont les deux mesurandes, ou grandeurs de sortie, à déterminer. La température t_0 est une température de référence exacte, choisie convenablement; ce n'est pas un paramètre indépendant à déterminer par l'ajustement par moindres carrés. Une fois qu'on a déterminé y_1 et y_2 ainsi que leurs variance et covariance estimées, l'Équation (H.12) peut être utilisée pour prédire la valeur et l'incertitude-type de la correction à appliquer au thermomètre pour toute valeur t de la température.

H.3.2 Ajustement par la méthode des moindres carrés

Sur la base de la méthode des moindres carrés et dans les hypothèses faites en H.3.1 ci-dessus, les grandeurs de sortie y_1 et y_2 et leurs variance et covariance estimées sont obtenues en minimisant la somme

$$S = \sum_{k=1}^n [b_k - y_1 - y_2(t_k - t_0)]^2$$

Cela conduit aux équations suivantes pour y_1 et y_2 , pour leurs variances expérimentales $s^2(y_1)$ et $s^2(y_2)$, et pour leur coefficient de corrélation estimé $r(y_1, y_2) = s(y_1, y_2)/s(y_1)s(y_2)$, où $s(y_1, y_2)$ est leur covariance estimée:

$$y_1 = \frac{(\sum b_k)(\sum \theta_k^2) - (\sum b_k \theta_k)(\sum \theta_k)}{D} \quad (\text{H.13a})$$

$$y_2 = \frac{n \sum b_k \theta_k - (\sum b_k)(\sum \theta_k)}{D} \quad (\text{H.13b})$$

$$s^2(y_1) = \frac{s^2 \sum \theta_k^2}{D} \quad (\text{H.13c})$$

$$s^2(y_2) = n \frac{s^2}{D} \quad (\text{H.13d})$$

$$r(y_1, y_2) = -\frac{\sum \theta_k}{\sqrt{n \sum \theta_k^2}} \quad (\text{H.13e})$$

$$s^2 = \frac{\sum [b_k - b(t_k)]^2}{n - 2} \quad (\text{H.13f})$$

$$D = n \sum \theta_k^2 - (\sum \theta_k)^2 = n \sum (\theta_k - \bar{\theta})^2 = n \sum (t_k - \bar{t})^2 \quad (\text{H.13g})$$

où toutes les sommations vont de $k = 1$ à n , où $\theta_k = t_k - t_0$, $\bar{\theta} = (\sum \theta_k)/n$, et $\bar{t} = (\sum t_k)/n$; $[b_k - b(t_k)]$ est la différence entre la correction mesurée ou observée b_k à la température t_k et la correction $b(t_k)$ prédite par la droite ajustée d'équation $b(t) = y_1 + y_2(t - t_0)$ à t_k . La variance s^2 est une mesure de l'incertitude globale de l'ajustement, et le facteur $n - 2$ reflète le fait que les deux paramètres y_1 et y_2 , sont déterminés à partir de n observations et que, en conséquence, le nombre de degrés de liberté de s^2 est $\nu = n - 2$ (voir [G.3.3](#)).

H.3.3 Calcul des résultats

Les données à ajuster sont indiquées dans les deuxième et troisième colonnes du Tableau [H.6](#). En prenant $t_0 = 20$ °C comme température de référence, l'application des Équations [\(H.13a\)](#) à [\(H.13g\)](#) donne

$$\begin{aligned} y_1 &= -0,171 \, 2 \text{ °C} & s(y_1) &= 0,002 \, 9 \text{ °C} \\ y_2 &= 0,002 \, 18 & s(y_2) &= 0,000 \, 67 \\ r(y_1, y_2) &= -0,930 & s &= 0,003 \, 5 \text{ °C} \end{aligned}$$

Le fait que la pente y_2 soit plus de trois fois plus grande que son incertitude-type justifie le choix d'une droite d'étalonnage plutôt qu'une correction moyenne fixe.

Tableau H.6 — Données utilisées pour obtenir une droite d'étalonnage pour un thermomètre, par la méthode des moindres carrés

Numéro de la lecture k	Lecture du thermomètre t_k (°C)	Correction observée $b_k = t_{R,k} - t_k$ (°C)	Correction prévue $b(t_k)$ (°C)	Différence entre les corrections observées et prévues $b_k - b(t_k)$ (°C)
1	21,521	-0,171	-0,167 9	-0,003 1
2	22,012	-0,169	-0,166 8	-0,002 2
3	22,512	-0,166	-0,165 7	-0,000 3
4	23,003	-0,159	-0,164 6	+0,005 6
5	23,507	-0,164	-0,163 5	-0,000 5
6	23,999	-0,165	-0,162 5	-0,002 5
7	24,513	-0,156	-0,161 4	+0,005 4
8	25,002	-0,157	-0,160 3	+0,003 3
9	25,503	-0,159	-0,159 2	+0,000 2
10	26,010	-0,161	-0,158 1	-0,002 9
11	26,511	-0,160	-0,157 0	-0,003 0

La fonction linéaire qui correspond à la droite d'étalonnage peut alors s'écrire, d'après les résultats obtenus pour l'ordonnée à l'origine et pour la pente

$$b(t) = -0,171\,2(29)^\circ\text{C} + 0,002\,18(67)(t - 20^\circ\text{C}) \quad (\text{H.14})$$

où chaque nombre écrit entre parenthèses est la valeur numérique de l'incertitude-type relative à la valeur numérique qui le précède et exprimé en unité du dernier chiffre écrit (voir 7.2.2). Cette équation donne la valeur prédite de la correction $b(t)$ à toute température t et, en particulier, la valeur $b(t_k)$ à $t = t_k$. Ces valeurs sont données dans la quatrième colonne du tableau, tandis que la dernière colonne donne les différences entre les valeurs mesurées et les valeurs prédites, $b_k - b(t_k)$. On peut utiliser l'analyse de ces différences pour vérifier la validité du modèle linéaire; il existe des tests de vérification pour cet usage (voir la Référence [8]), mais ils ne sont pas envisagés ici.

H.3.4 Incertitude d'une valeur prédite

L'expression pour l'incertitude-type composée de la valeur prédite d'une correction peut être facilement obtenue en appliquant la loi de propagation de l'incertitude, Équation (16) de 5.2.2, à l'Équation (H.12). En remarquant que $b(t) = f(y_1, y_2)$ et en écrivant $u(y_1) = s(y_1)$ et $u(y_2) = s(y_2)$, on obtient

$$u_c^2[b(t)] = u^2(y_1) + (t - t_0)^2 u^2(y_2) + 2(t - t_0) u(y_1) u(y_2) r(y_1, y_2) \quad (\text{H.15})$$

La variance estimée $u_c^2[b(t)]$ présente un minimum à $t_{\min} = t_0 - u(y_1)r(y_1, y_2)/u(y_2)$, ce qui donne dans ce cas $t_{\min} = 24,008\,5^\circ\text{C}$.

Comme exemple d'utilisation de l'Équation (H.15), supposons qu'on recherche la correction pour le thermomètre et son incertitude à $t = 30^\circ\text{C}$, valeur qui se situe en dehors de la plage de température pour laquelle le thermomètre a été en fait étalonné. En substituant $t = 30^\circ\text{C}$ dans l'Équation (H.14) on obtient

$$b(30^\circ\text{C}) = -0,149\,4^\circ\text{C}$$

tandis que l'Équation (H.15) devient

$$u_c^2[b(30\text{ °C})] = (0,002\,9\text{ °C})^2 + (10\text{ °C})^2 (0,000\,67)^2 + 2(10\text{ °C})(0,002\,9\text{ °C})(0,000\,67)(-0,930) \\ = 17,1 \times 10^{-6}\text{ °C}^2$$

ou

$$u_c[b(30\text{ °C})] = 0,004\,1\text{ °C}$$

La correction à 30 °C est alors $-0,149\,4\text{ °C}$, avec une incertitude-type composée $u_c = 0,004\,1\text{ °C}$, ayant $\nu = n - 2 = 9$ degrés de liberté.

H.3.5 Élimination de la corrélation entre la pente et l'ordonnée

L'Équation (H.13e) pour le coefficient de corrélation $r(y_1, y_2)$ implique que si t_0 est choisi de telle sorte que $\sum_{k=1}^n \theta_k = \sum_{k=1}^n (t_k - t_0) = 0$, alors $r(y_1, y_2) = 0$ et y_1 et y_2 ne seront pas corrélés, simplifiant de ce fait le calcul de l'incertitude-type d'une correction prédite. Puisque $\sum_{k=1}^n \theta_k = 0$ lorsque $t_0 = \bar{t} = \left(\sum_{k=1}^n t_k\right)/n$, et que $\bar{t} = 24,008\,5\text{ °C}$ dans le cas présent, en effectuant de nouveau l'ajustement par les moindres carrés avec $t_0 = \bar{t} = 24,008\,5\text{ °C}$ on obtiendrait les valeurs de y_1 et y_2 non corrélées. (La température est aussi la température à laquelle $u^2[b(t)]$ présente un minimum — voir H.3.4.) Il n'est cependant pas nécessaire de refaire l'ajustement parce qu'on peut montrer que

$$b(t) = y'_1 + y_2(t - \bar{t}) \quad (\text{H.16a})$$

$$u_c^2[b(t)] = u^2(y'_1) + (t - \bar{t})^2 u^2(y_2) \quad (\text{H.16b})$$

$$r(y'_1, y_2) = 0 \quad (\text{H.16c})$$

où

$$y'_1 = y_1 + y_2(\bar{t} - t_0)$$

$$\bar{t} = t_0 - s(y_1)r(y_1, y_2)/s(y_2)$$

$$s^2(y'_1) = s^2(y_1)[1 - r^2(y_1, y_2)]$$

et en écrivant l'Équation (H.16b), les substitutions $u(y'_1) = s(y'_1)$ et $u(y_2) = s(y_2)$ ont été faites [voir Équation (H.15)].

En appliquant ces relations aux résultats donnés en H.3.3 on obtient

$$b(t) = -0,162\,5(11) + 0,002\,18(67)(t - 24,008\,5\text{ °C}) \quad (\text{H.17a})$$

$$u_c^2[b(t)] = (0,001\,1)^2 + (t - 24,008\,5\text{ °C})^2 (0,000\,67)^2 \quad (\text{H.17b})$$

On peut vérifier le fait que ces équations donnent les mêmes résultats que les Équations (H.14) et (H.15) en recommençant les calculs de $b(30\text{ °C})$ et de $u_c[b(30\text{ °C})]$. En substituant $t = 30\text{ °C}$ dans les Équations (H.17a) et (H.17b) on obtient

$$b(30\text{ °C}) = -0,149\,4\text{ °C}$$

$$u_c[b(30\text{ °C})] = 0,004\,1\text{ °C}$$

qui sont identiques aux résultats obtenus en H.3.4. La covariance estimée entre deux corrections prédites $b(t_1)$ et $b(t_2)$ peut être obtenue à partir de l'Équation (H.9) de H.2.3.

H.3.6 Autres considérations

La méthode des moindres carrés peut être utilisée pour ajuster des courbes de degré plus élevé à des points expérimentaux et elle est aussi applicable aux cas où les données individuelles ont des incertitudes. La littérature classique sur le sujet doit être consultée pour plus de détails [8]. Cependant, les exemples suivants illustrent deux cas où les corrections mesurées b_k ne sont pas supposées être connues exactement.

- 1) Supposons que chaque t_k ait une incertitude négligeable, que chacune des n valeurs $t_{R,k}$ soit obtenue à partir d'une série de m lectures répétées et que la variance de ces lectures estimée sur l'ensemble d'une grande quantité de données obtenues sur une période de plusieurs mois soit s_p^2 . La variance estimée de chaque $t_{R,k}$ est alors $s_p^2/m = u_0^2$ et chaque correction observée $b_k = t_{R,k} - t_k$ a la même incertitude-type u_0 . Dans ces circonstances (et dans l'hypothèse qu'il n'y ait pas de raison de croire que le modèle linéaire soit incorrect), u_0^2 remplace s^2 dans les Équations (H.13c) et (H.13d).

NOTE Une estimation de la variance s_p^2 , effectuée sur un ensemble de N séries d'observations indépendantes de la même variable aléatoire, est obtenue à partir de

$$s_p^2 = \frac{\sum_{i=1}^N v_i s_i^2}{\sum_{i=1}^N v_i}$$

où s_i^2 est la variance expérimentale de la i ème série de n_i observations répétées indépendantes [Équation (4) de 4.2.2] avec un nombre de degrés de liberté $v_i = n_i - 1$. Le nombre de degrés de liberté de s_p^2 est $v = \sum_{i=1}^N v_i$. La variance expérimentale s_p^2/m (et l'écart-type expérimental $s_p/\sqrt{m}$) de la moyenne arithmétique de m observations indépendantes caractérisées par l'estimation de la variance s_p^2 établie à partir d'un ensemble de données a aussi v degrés de liberté.

- 2) Supposons que chaque t_k ait une incertitude négligeable, qu'une correction ε_k soit appliquée à chacune des n valeurs $t_{R,k}$, et que chaque correction ait la même incertitude-type u_a . Alors, l'incertitude-type de chaque $b_k = t_{R,k} - t_k$ est aussi u_a , et $s^2(y_1)$ est remplacé par $s^2(y_1) + u_a^2$ et $s^2(y'_1)$ est remplacé par $s^2(y'_1) + u_a^2$.

H.4 Mesurage d'activité

Cet exemple ressemble à l'exemple H.2, mesurage simultané de la résistance et de la réactance, en ce sens que les données peuvent être analysées de deux façons différentes mais que chacune donne essentiellement le même résultat numérique. La première approche illustre une fois de plus la nécessité de prendre en compte les corrélations observées entre les grandeurs d'entrée.

H.4.1 Le problème de mesure

L'activité massique inconnue en radon (^{222}Rn) dans un échantillon d'eau est déterminée par comptage par scintillation liquide par rapport à un échantillon étalon de radon dans l'eau possédant une activité massique connue. L'activité massique inconnue est obtenue par la mesure de trois sources de comptage consistant approximativement en 5 g d'eau et 12 g de scintillateur en émulsion organique dans des fioles de volume 22 ml:

- Source (a) un *étalon* consistant en une masse m_S de la solution étalon d'activité massique connue;
- Source (b) un *blanc*, échantillon d'eau identique mais ne contenant pas de substance radioactive, utilisé pour obtenir le taux de comptage du bruit de fond;
- Source (c) l'*échantillon* consistant en une partie aliquote de masse m_x d'activité massique inconnue.

On réalise six cycles de mesurage des trois sources dans l'ordre étalon — blanc — échantillon; chaque durée de comptage T_0 pour chaque source, corrigée des temps morts, est de 60 minutes pour chacun des six cycles. Bien qu'on ne puisse pas supposer constant le taux de comptage du bruit de fond sur la totalité de la durée de comptage (65 heures), on suppose que le nombre de coups obtenus pour chaque blanc peut être utilisé comme étant représentatif du taux de comptage du bruit de fond pendant les mesurages de l'étalon et de l'échantillon pour le même cycle. Les données sont présentées dans le Tableau H.7, où

t_S, t_B, t_x sont les durées depuis l'instant de référence $t = 0$ jusqu'au point milieu des intervalles de comptage, corrigés des temps morts, $T_0 = 60$ min respectivement pour les fioles de l'étalon, du blanc et de l'échantillon; bien que t_B soit donné pour que les informations soient complètes, il n'est pas nécessaire dans l'analyse;

C_S, C_B, C_x sont les nombres de coups enregistrés pendant les intervalles de comptage, corrigés des temps morts, $T_0 = 60$ min respectivement pour les fioles de l'étalon, du blanc et de l'échantillon.

Le nombre de coups observé peut être exprimé sous la forme

$$C_S = C_B + \varepsilon A_S T_0 m_S e^{-\lambda t_S} \quad (\text{H.18a})$$

$$C_x = C_B + \varepsilon A_x T_0 m_x e^{-\lambda t_x} \quad (\text{H.18b})$$

où

ε est l'efficacité de détection du scintillateur liquide pour ^{222}Rn pour une composition de source donnée, en supposant qu'elle soit indépendante du niveau d'activité;

A_S est l'activité massique de l'étalon à l'instant de référence $t = 0$;

A_x est le *mesurande* et il est défini comme l'activité massique de l'échantillon à l'instant de référence $t = 0$;

m_S est la masse de la solution étalon;

m_x est la masse de l'aliquote d'échantillon;

λ est la constante de désintégration pour ^{222}Rn : $\lambda = (\ln 2)/T_{1/2} = 1,258\,94 \times 10^{-4} \text{ min}^{-1}$ ($T_{1/2} = 5\,505,8 \text{ min}$).

Tableau H.7 — Données de comptage pour la détermination de l'activité massique d'un échantillon inconnu

Cycle	Étalon		Blanc		Échantillon	
k	t_S (min)	C_S (coups)	t_B (min)	C_B (coups)	t_x (min)	C_x (coups)
1	243,74	15 380	305,56	4 054	367,37	41 432
2	984,53	14 978	1 046,10	3 922	1 107,66	38 706
3	1 723,87	14 394	1 785,43	4 200	1 846,99	35 860
4	2 463,17	13 254	2 524,73	3 830	2 586,28	32 238
5	3 217,56	12 516	3 279,12	3 956	3 340,68	29 640
6	3 956,83	11 058	4 018,38	3 980	4 079,94	26 356

Les Équations (H.18a) et (H.18b) montrent qu'il n'est pas possible de faire directement la moyenne des six valeurs individuelles de C_S ou de C_x données au Tableau H.7 en raison de la décroissance exponentielle de l'activité de l'étalon et de l'échantillon et en raison des faibles variations de comptage du bruit de fond d'un cycle à un autre. Au lieu de cela, on doit s'intéresser aux comptages corrigés de la décroissance et corrigés du bruit de fond (ou aux taux de comptage définis par le nombre de coups divisés par $T_0 = 60$ min). Cela suggère de combiner les Équations (H.18a) et (H.18b) pour obtenir l'expression suivante de l'activité massique inconnue en fonction des grandeurs connues:

$$\begin{aligned} A_x &= f(A_S, m_S, m_x, C_S, C_x, C_B, t_S, t_x, \lambda) \\ &= A_S \frac{m_S (C_x - C_B) e^{\lambda t_x}}{m_x (C_S - C_B) e^{\lambda t_S}} \\ &= A_S \frac{m_S}{m_x} \frac{C_x - C_B}{C_S - C_B} e^{\lambda(t_x - t_S)} \end{aligned} \quad (\text{H.19})$$

où $(C_x - C_B)e^{\lambda t_x}$ et $(C_S - C_B)e^{\lambda t_S}$ sont les comptages corrigés du bruit de fond respectivement pour l'échantillon et l'étalon, à l'instant de référence $t = 0$ et pour l'intervalle de temps $T_0 = 60$ min. On peut simplement écrire à la place

$$A_x = f(A_S, m_S, m_x, R_S, R_x) = A_S \frac{m_S}{m_x} \frac{R_x}{R_S} \quad (\text{H.20})$$

où les *taux de comptage* R_x et R_S corrigés du bruit de fond et de la décroissance sont donnés par

$$R_x = [(C_x - C_B)/T_0] e^{\lambda t_x} \quad (\text{H.21a})$$

$$R_S = [(C_S - C_B)/T_0] e^{\lambda t_S} \quad (\text{H.21b})$$

H.4.2 Analyse des données

Le Tableau H.8 résume les valeurs des taux de comptage R_S et R_x corrigés du bruit de fond et de la décroissance, obtenus à partir des Équations (H.21a) et (H.21b) en utilisant les données du Tableau H.7 et $\lambda = 1,258\,94 \times 10^{-4} \text{ min}^{-1}$ comme indiqué précédemment. On doit noter que le rapport $R = R_x/R_S$ se calcule plus simplement à partir de l'expression

$$[(C_x - C_B)/(C_S - C_B)] e^{\lambda(t_x - t_S)}$$

Les moyennes arithmétiques $\bar{R}_S$, $\bar{R}_x$, et $\bar{R}$, et leurs écarts-types expérimentaux $s(\bar{R}_S)$, $s(\bar{R}_x)$, et $s(\bar{R})$, sont calculés de la manière habituelle [Équations (3) et (5) de 4.2]. Le coefficient de corrélation $r(\bar{R}_x, \bar{R}_S)$ est calculé à partir de l'Équation (17) de 5.2.3 et de l'Équation (14) de 5.2.2.

En raison de la variabilité relativement faible des valeurs de R_x et de R_S , le rapport des moyennes $\bar{R}_x/\bar{R}_S$ et l'incertitude-type de ce rapport $u(\bar{R}_x/\bar{R}_S)$ sont respectivement très voisins du rapport moyen $\bar{R}$ et de son écart-type expérimental $s(\bar{R})$ tels que donnés dans la dernière colonne du Tableau H.8 [voir H.2.4 et l'Équation (H.10) de ce paragraphe]. Cependant, lors du calcul de l'incertitude-type $u(\bar{R}_x/\bar{R}_S)$, on doit prendre en compte la corrélation entre R_x et R_S telle que représentée par le coefficient de corrélation $r(\bar{R}_x, \bar{R}_S)$ en utilisant l'Équation (16) de 5.2.2. [Cette équation donne, pour la variance relative estimée de $\bar{R}_x/\bar{R}_S$, les trois derniers termes de l'Équation (H.22b).]

On doit reconnaître que les écarts-types expérimentaux de R_x et R_S , $\sqrt{6}s(\bar{R}_x)$ et $\sqrt{6}s(\bar{R}_S)$, indiquent une variabilité pour ces grandeurs qui est deux à trois fois supérieure à la variabilité impliquée par la statistique de Poisson du processus de comptage; cette dernière est incluse dans la variabilité observée des comptages et ne nécessite pas d'être prise en compte séparément.

Tableau H.8 — Calcul des taux de comptage corrigés de la décroissance et du bruit de fond

Cycle k	R_x (min ⁻¹)	R_S (min ⁻¹)	$t_x - t_S$ (min)	$R = R_x/R_S$
1	652,46	194,65	123,63	3,352 0
2	666,48	208,58	123,13	3,195 3
3	665,80	211,08	123,12	3,154 3
4	655,68	214,17	123,11	3,061 5
5	651,87	213,92	123,12	3,047 3
6	623,31	194,13	123,11	3,210 7
	$\bar{R}_x = 652,60$ $s(\bar{R}_x) = 6,42$ $s(\bar{R}_x)/\bar{R}_x = 0,98 \times 10^{-2}$	$\bar{R}_S = 206,09$ $s(\bar{R}_S) = 3,79$ $s(\bar{R}_S)/\bar{R}_S = 1,84 \times 10^{-2}$		$\bar{R} = 3,170$ $s(\bar{R}) = 0,046$ $s(\bar{R})/\bar{R} = 1,44 \times 10^{-2}$
	$\bar{R}_x/\bar{R}_S = 3,167$ $u(\bar{R}_x/\bar{R}_S) = 0,045$ $u(\bar{R}_x/\bar{R}_S)/(\bar{R}_x/\bar{R}_S) = 1,42 \times 10^{-2}$			
Coefficient de corrélation				
$r(\bar{R}_x, \bar{R}_S) = 0,646$				

H.4.3 Calcul des résultats finals

Pour obtenir l'activité massique inconnue A_x et son incertitude-type composée $u_c(A_x)$ à partir de l'Équation (H.20), il faut avoir A_S , m_x , et m_S et leurs incertitudes-types. Ces valeurs sont données ci-après:

$$A_S = 0,136 8 \text{ Bq/g}$$

$$u(A_S) = 0,001 8 \text{ Bq/g}; \quad u(A_S) / A_S = 1,32 \times 10^{-2}$$

$$m_S = 5,019 2 \text{ g}$$

$$u(m_S) = 0,005 0 \text{ g}; \quad u(m_S) / m_S = 0,10 \times 10^{-2}$$

$$m_x = 5,057 1 \text{ g}$$

$$u(m_x) = 0,001 0 \text{ g}; \quad u(m_x) / m_x = 0,02 \times 10^{-2}$$

D'autres sources possibles d'incertitude sont évaluées comme étant négligeables:

- les incertitudes-types des durées de décroissance, $u(t_{S, k})$ et $u(t_{x, k})$;
- l'incertitude de la constante de désintégration de ^{222}Rn , $u(\lambda) = 1 \times 10^{-7} \text{ min}^{-1}$. (La grandeur significative est le facteur de décroissance $\exp[\lambda(t_x - t_S)]$, qui varie de 1,015 63 pour les cycles $k = 4$ et 6 à 1,015 70 pour le cycle $k = 1$. L'incertitude-type de ces valeurs est $u = 1,2 \times 10^{-5}$);
- l'incertitude associée à la dépendance possible de l'efficacité de détection du compteur de scintillation avec la source utilisée (étalon, blanc ou échantillon);
- l'incertitude de la correction pour le temps mort du compteur et de la correction pour la dépendance entre l'efficacité de comptage et le niveau d'activité.

H.4.3.1 Résultats: approche n° 1

Comme indiqué précédemment, A_x et $u_c(A_x)$ peuvent être obtenus de deux manières différentes à partir de l'Équation (H.20). Pour la première approche, A_x est calculé en utilisant les moyennes arithmétiques $\bar{R}_x$ et $\bar{R}_S$, ce qui conduit à

$$A_x = A_S \frac{m_S}{m_x} \frac{\bar{R}_x}{\bar{R}_S} = 0,430 \text{ 0 Bq/g} \quad (\text{H.22a})$$

L'application de l'Équation (16) de 5.2.2 à cette expression donne pour la variance composée $u_c^2(A_x)$

$$\frac{u_c^2(A_x)}{A_x^2} = \frac{u^2(A_S)}{A_S^2} + \frac{u^2(m_S)}{m_S^2} + \frac{u^2(m_x)}{m_x^2} + \frac{u^2(\bar{R}_x)}{\bar{R}_x^2} + \frac{u^2(\bar{R}_S)}{\bar{R}_S^2} - 2r(\bar{R}_x, \bar{R}_S) \frac{u(\bar{R}_x)u(\bar{R}_S)}{\bar{R}_x \bar{R}_S} \quad (\text{H.22b})$$

où, comme noté en H.4.2, les trois derniers termes donnent $u^2(\bar{R}_x/\bar{R}_S)/(\bar{R}_x/\bar{R}_S)^2$, variance relative estimée de $\bar{R}_x/\bar{R}_S$. En accord avec la présentation de H.2.4, les résultats du Tableau H.8 montrent que $\bar{R}$ n'est pas exactement égal à $\bar{R}_x/\bar{R}_S$; et que l'incertitude-type de $\bar{R}_x/\bar{R}_S$, $u(\bar{R}_x/\bar{R}_S)$ n'est pas exactement égale à l'incertitude-type $s(\bar{R})$ de $\bar{R}$.

En substituant les valeurs des grandeurs correspondantes dans les Équations (H.22a) et (H.22b), on obtient

$$\frac{u_c(A_x)}{A_x} = 1,93 \times 10^{-2}$$

$$u_c(A_x) = 0,008 \text{ 3 Bq/g}$$

Le résultat du mesurage peut alors être donné sous la forme:

$$A_x = 0,430 \text{ 0 Bq/g avec une incertitude-type composée } u_c = 0,008 \text{ 3 Bq/g.}$$

H.4.3.2 Résultats: approche n° 2

Dans la deuxième approche, qui évite la corrélation entre $\bar{R}_x$ et $\bar{R}_S$, A_x est calculé en utilisant la moyenne arithmétique $\bar{R}$. Alors

$$A_x = A_S \frac{m_S}{m_x} \bar{R} = 0,430 \text{ 4 Bq/g} \quad (\text{H.23a})$$

L'expression pour $u_c^2(A_x)$ est simplement

$$\frac{u_c^2(A_x)}{A_x^2} = \frac{u^2(A_S)}{A_S^2} + \frac{u^2(m_S)}{m_S^2} + \frac{u^2(m_x)}{m_x^2} + \frac{u^2(\bar{R})}{\bar{R}^2} \quad (\text{H.23b})$$

ce qui donne

$$\frac{u_c(A_x)}{A_x} = 1,95 \times 10^{-2}$$

$$u_c(A_x) = 0,008 \text{ 4 Bq/g}$$

Le résultat du mesurage peut alors être donné sous la forme:

$$A_x = 0,430 \text{ 4 Bq/g avec une incertitude-type composée } u_c = 0,008 \text{ 4 Bq/g.}$$

Le nombre effectif de degrés de liberté de u_c peut être évalué par utilisation de la formule de Welch-Satterthwaite comme cela est illustré en [H.1.6](#).

Comme pour [H.2](#), des deux résultats, on préférera le deuxième car il évite d'obtenir l'approximation de la moyenne d'un rapport de deux grandeurs par le rapport des moyennes des deux grandeurs; et il reflète mieux la procédure de mesure utilisée — les données ont été recueillies en fait lors de cycles séparés.

Cependant, la différence entre les valeurs de A_x résultant des deux approches est visiblement faible comparée à l'incertitude-type attribuée à l'une ou à l'autre et la différence entre les deux incertitudes-types est parfaitement négligeable. Un tel accord montre que les deux approches sont équivalentes lorsqu'on inclut correctement les corrélations observées.

H.5 Analyse de variance

Cet exemple fournit une brève introduction aux méthodes d'analyse de variance. Ces techniques statistiques sont utilisées pour identifier et quantifier des *effets aléatoires* individuels dans un mesurage de sorte qu'ils puissent être pris en compte correctement lorsqu'on évalue l'incertitude du résultat de mesure. Bien qu'elles soient applicables à de nombreuses catégories de mesurages, par exemple à l'étalonnage d'étalons de référence tels que des étalons de tension à diode de Zener ou des étalons de masse, ou à la certification de matériaux de référence, les méthodes d'analyse de variance ne peuvent, par elles-mêmes, mettre en évidence les effets systématiques qui pourraient se présenter.

Il existe de nombreux modèles différents inclus sous le nom général d'analyse de variance. En raison de son importance, le modèle particulier utilisé dans cet exemple est le plan emboîté équilibré. L'illustration numérique de ce modèle porte sur l'étalonnage d'un étalon de tension à diode de Zener; l'analyse devrait pouvoir s'appliquer à de nombreuses situations pratiques de mesure.

Les méthodes d'analyse de variance sont d'importance toute spéciale pour la certification des matériaux de référence (MR) par essais interlaboratoires, sujet traité à fond dans le Guide ISO 35 [\[19\]](#) (voir [H.5.3.2](#) pour une brève description de cette certification des matériaux de référence). Comme la plus grande partie du contenu du Guide ISO 35 est en fait largement applicable, on peut consulter cette publication pour des détails complémentaires concernant l'analyse de variance, y compris les plans emboîtés non équilibrés. Les Références [\[15\]](#) et [\[20\]](#) peuvent aussi être consultées.

H.5.1 Le problème de mesure

Considérons un étalon de tension à diode de Zener de valeur nominale 10 V, étalonné par rapport à une référence stable de tension durant une période de deux semaines. Pour chaque jour J de la période, on effectue K observations répétées indépendantes de la différence de potentiel V_S de l'étalon. Appelons V_{jk} la k ième observation de V_S ($k = 1, 2, \dots, K$) le j ième jour ($j = 1, 2, \dots, J$), la meilleure estimation de la différence de potentiel de l'étalon est la moyenne arithmétique $\bar{V}$ des JK observations [voir Équation [\(3\)](#) de [4.2.1](#)],

$$V_S = \frac{1}{JK} \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K V_{jk} = \bar{V} \quad (\text{H.24a})$$

L'écart-type expérimental de la moyenne $s(\bar{V})$, qui est une mesure de l'incertitude de $\bar{V}$ comme estimation de la différence de potentiel de l'étalon, est obtenu par [voir Équation [\(5\)](#) de [4.2.3](#)]

$$s^2(\bar{V}) = \frac{1}{JK(JK-1)} \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K (V_{jk} - \bar{V})^2 \quad (\text{H.24b})$$

NOTE Tout au long de cet exemple, on suppose que toutes les corrections appliquées aux observations pour compenser les effets systématiques ont des incertitudes négligeables ou que leurs incertitudes sont telles qu'elles peuvent être prises en compte à la fin de l'analyse. La différence entre la valeur certifiée (supposée avoir une incertitude donnée) et la valeur de travail de la référence de tension stable par rapport à laquelle est étalonné l'étalon de tension à diode de Zener est une correction qui entre dans cette dernière catégorie et qui peut elle-même être appliquée à la moyenne des

observations à la fin de l'analyse. Il en résulte que l'estimation de la différence de potentiel de l'étalon obtenue statistiquement à partir des observations n'est pas nécessairement le résultat final du mesurage; et l'écart-type expérimental de cette estimation n'est pas nécessairement l'incertitude-type composée du résultat final.

L'écart-type expérimental de la moyenne $s(V)$ obtenu à partir de l'Équation (H.24b) est une mesure appropriée de l'incertitude de $\bar{V}$ seulement si la variabilité de jour en jour des observations est la même que la variabilité des observations durant un seul jour. Si l'on peut mettre en évidence que la variabilité «inter-jours» est significativement plus grande que ce à quoi l'on peut s'attendre à partir de la variabilité «intra-jour», l'utilisation de cette expression peut conduire à une sous-estimation considérable de l'incertitude de $\bar{V}$. Deux questions surgissent alors: comment doit-on décider si la variabilité inter-jours (caractérisée par une composante de variance inter-jours) est significative par comparaison avec la variabilité intra-jour (caractérisée par une composante de variance intra-jour) et si c'est le cas, comment doit-on évaluer l'incertitude de la moyenne?

H.5.2 Un exemple numérique

H.5.2.1 Les données qui permettent d'aborder les questions ci-dessus sont présentées au Tableau H.9, où

$J = 10$ est le nombre de jours pendant lesquels on fait les observations de différence de potentiel;

$K = 5$ est le nombre d'observations de différence de potentiel faites chaque jour;

$$\bar{V}_j = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K V_{jk} \quad (\text{H.25a})$$

est la moyenne arithmétique des $K = 5$ observations de différence de potentiel faites le j ème jour (il y a $J = 10$ moyennes journalières);

$$\bar{V} = \frac{1}{J} \sum_{j=1}^J \bar{V}_j = \frac{1}{JK} \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K V_{jk} \quad (\text{H.25b})$$

est la moyenne arithmétique des $J = 10$ moyennes journalières et donc la moyenne globale des $JK = 50$ observations;

$$s^2(V_{jk}) = \frac{1}{K-1} \sum_{k=1}^K (V_{jk} - \bar{V}_j)^2 \quad (\text{H.25c})$$

est la variance expérimentale des $K = 5$ observations faites le j ème jour (il y a $J = 10$ estimations de variance); et

$$s^2(\bar{V}_j) = \frac{1}{J-1} \sum_{j=1}^J (\bar{V}_j - \bar{V})^2 \quad (\text{H.25d})$$

est la variance expérimentale des $J = 10$ moyennes journalières (il n'y a qu'une seule estimation de la variance).

Tableau H.9 — Résumé des données d'étalonnage de tension obtenues pour $J = 10$ jours, avec chaque moyenne journalière $\bar{V}_j$ et chaque écart-type expérimental $s(V_{jk})$ sur la base de $K = 5$ observations indépendantes répétées

Grandeur	Jour, j									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\bar{V}_j / \text{V}$	10,000 172	10,000 116	10,000 013	10,000 144	10,000 106	10,000 031	10,000 060	10,000 125	10,000 163	10,000 041
$s(V_{jk}) / \mu\text{V}$	60	77	111	101	67	93	80	73	88	86
$\bar{V} = 10,000\,097\,\text{V}$ $s_a^2 = K s^2(\bar{V}_j) = 5(57\,\mu\text{V})^2 = (128\,\mu\text{V})^2$ $s(\bar{V}_j) = 57\,\mu\text{V}$ $s_b^2 = s^2(V_{jk}) = (85\,\mu\text{V})^2$										

H.5.2.2 L'uniformité de la variabilité intra-jour et de la variabilité inter-jours des observations peut être examinée en comparant deux estimations indépendantes de σ_W^2 , composante de variance intra-jour (c'est-à-dire la variance des observations faites le même jour).

La première estimation de σ_W^2 , notée s_a^2 , est obtenue à partir de la variation observée des moyennes journalières $\bar{V}_j$. Puisque $\bar{V}_j$ est la moyenne de K observations, sa variance estimée $s^2(\bar{V}_j)$, estime σ_W^2 / K avec l'hypothèse que la composante de variance inter-jours est nulle. Il s'ensuit alors de l'Équation (H.25d) que

$$s_a^2 = K s^2(\bar{V}_j) = \frac{K}{J-1} \sum_{j=1}^J (\bar{V}_j - \bar{V})^2 \quad (\text{H.26a})$$

qui est une estimation de σ_W^2 ayant $\nu_a = J - 1 = 9$ degrés de liberté.

La deuxième estimation de σ_W^2 , notée s_b^2 , est l'estimation de variance sur l'ensemble des données obtenues à partir des $J = 10$ valeurs individuelles de $s^2(V_{jk})$ en utilisant l'équation de la Note de H.3.6, où les dix valeurs individuelles sont calculées à partir de l'Équation (H.25c). Puisque le nombre de degrés de liberté de chacune de ces valeurs est $\nu_i = K - 1$, l'expression résultante pour s_b^2 est simplement leur moyenne. Alors

$$s_b^2 = \overline{s^2(V_{jk})} = \frac{1}{J} \sum_{j=1}^J s^2(V_{jk}) = \frac{1}{J(K-1)} \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K (V_{jk} - \bar{V}_j)^2 \quad (\text{H.26b})$$

qui est une estimation de σ_W^2 ayant $\nu_b = J(K - 1) = 40$ degrés de liberté.

Les estimations de σ_W^2 données par les Équations (H.26a) et (H.26b) sont respectivement $s_a^2 = (128 \mu\text{V})^2$ et $s_b^2 = (85 \mu\text{V})^2$ (voir Tableau H.9). Puisque l'estimation s_a^2 est fondée sur la variabilité des moyennes journalières, tandis que l'estimation s_b^2 est fondée sur la variabilité des observations journalières, leur différence indique la présence possible d'un effet qui varie d'un jour à l'autre mais qui reste relativement constant lorsque les observations sont faites un même jour. On utilise le test F pour tester cette possibilité et, en conséquence, l'hypothèse que la composante inter-jours de la variance est nulle.

H.5.2.3 La loi de F est la loi de probabilité du rapport $F(\nu_a, \nu_b) = s_a^2(\nu_a) / s_b^2(\nu_b)$ de deux estimations indépendantes, $s_a^2(\nu_a)$ et $s_b^2(\nu_b)$, de la variance σ^2 d'une variable aléatoire normalement distribuée [15]. Les paramètres ν_a et ν_b sont respectivement les nombres de degrés de liberté des deux estimations et $0 \leq F(\nu_a, \nu_b) < \infty$. Les valeurs de F sont tabulées pour différentes valeurs de ν_a et ν_b et pour différents fractiles de la loi de F . Une valeur de $F(\nu_a, \nu_b) > F_{0,95}$ ou $F(\nu_a, \nu_b) > F_{0,975}$ (la valeur critique) est habituellement interprétée comme indiquant que $s_a^2(\nu_a)$ est plus grand que $s_b^2(\nu_b)$ d'une quantité statistiquement significative et que la probabilité d'une valeur de F aussi grande que celle qui est observée, si les deux estimations sont des estimations de la même variance, est inférieure respectivement à 0,05 ou à 0,025. (D'autres valeurs critiques peuvent aussi être choisies, par exemple $F_{0,99}$.)

H.5.2.4 L'application du test F au présent exemple numérique donne

$$F(\nu_a, \nu_b) = \frac{s_a^2}{s_b^2} = \frac{K s^2(\bar{V}_j)}{s^2(V_{jk})} = \frac{5(57 \mu\text{V})^2}{(85 \mu\text{V})^2} = 2,25 \quad (\text{H.27})$$

avec $\nu_a = J - 1 = 9$ degrés de liberté au numérateur et $\nu_b = J(K - 1) = 40$ degrés de liberté au dénominateur. Puisque $F_{0,95}(9,40) = 2,12$ et $F_{0,975}(9,40) = 2,45$, on conclut qu'il y a un effet inter-jours statistiquement significatif au niveau de signification de 5 pour-cent mais non au niveau de 2,5 pour-cent.

H.5.2.5 Si l'existence d'un effet inter-jours est rejetée parce que la différence entre s_a^2 et s_b^2 n'est pas considérée comme statistiquement significative (décision imprudente parce qu'elle pourrait conduire à une

sous-estimation de l'incertitude), la variance estimée $s^2(\bar{V})$ de $\bar{V}$ doit être calculée à partir de l'Équation (H.24b). Cette relation est équivalente à la mise en commun des estimations s_a^2 et s_b^2 (c'est-à-dire en prenant une valeur pondérée de s_a^2 et s_b^2 , chaque valeur étant pondérée par son nombre respectif de degrés de liberté ν_a et ν_b — voir H.3.6, Note) pour obtenir la meilleure estimation de la variance des observations; puis en divisant cette estimation par JK , nombre des observations, on obtient la meilleure estimation $s^2(\bar{V})$ de la variance de la moyenne des observations. En suivant cette procédure, on obtient

$$s^2(\bar{V}) = \frac{(J-1)s_a^2 + J(K-1)s_b^2}{JK(JK-1)} = \frac{9(128 \mu\text{V})^2 + 40(85 \mu\text{V})^2}{(10)(5)(49)} \quad (\text{H.28a})$$

$$s^2(\bar{V}) = (13 \mu\text{V})^2, \quad \text{ou} \quad s(\bar{V}) = 13 \mu\text{V} \quad (\text{H.28b})$$

avec $s(\bar{V})$ ayant $JK - 1 = 49$ degrés de liberté.

Si l'on suppose que toutes les corrections pour les effets systématiques ont déjà été prises en compte et que toutes les autres composantes de l'incertitude sont négligeables, alors le résultat de l'étalonnage peut être donné comme $V_S = \bar{V} = 10,000\,097 \text{ V}$ (voir Tableau H.9), avec une incertitude-type composée $s(\bar{V}) = u_C = 13 \mu\text{V}$, et avec 49 degrés de liberté pour u_C .

NOTE 1 En pratique, il y aura très probablement des composantes d'incertitude supplémentaires qui seront significatives et devront, en conséquence, être composées avec la composante d'incertitude obtenue statistiquement à partir des observations (voir H.5.1, Note).

NOTE 2 On peut montrer que l'Équation (H.28a) pour $s^2(\bar{V})$ est équivalente à l'Équation (H.24b) en écrivant la double somme, notée S , dans cette équation comme

$$S = \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K \left[(V_{jk} - \bar{V}_j) + (\bar{V}_j - \bar{V}) \right]^2 = (J-1)s_a^2 + J(K-1)s_b^2$$

H.5.2.6 Si l'on accepte l'existence d'un effet inter-jours (décision prudente parce qu'elle évite une sous-estimation possible de l'incertitude) et si on le suppose aléatoire, alors la variance $s^2(V_S = \bar{V}_j)$ calculée à partir des $J=10$ moyennes journalières selon l'Équation (H.25d) n'estime plus σ_W^2/K comme on le postulait en H.5.2.2, mais $\sigma_W^2/K + \sigma_B^2$, où σ_B^2 est la composante aléatoire inter-jours de la variance. Cela implique que

$$s^2(\bar{V}_j) = s_W^2/K + s_B^2 \quad (\text{H.29})$$

où s_W^2 estime σ_W^2 et s_B^2 estime σ_B^2 . Puisque $\overline{s^2(V_{jk})}$ calculé à partir de l'Équation (H.26b) ne dépend que de la variabilité intra-jour des observations, on peut prendre $s_W^2 = s^2(V_{jk})$. Le rapport $Ks^2(\bar{V}_j)/s^2(V_{jk})$ utilisé pour le test F en H.5.2.4 devient alors

$$F = \frac{Ks^2(\bar{V}_j)}{s^2(V_{jk})} = \frac{s_W^2 + Ks_B^2}{s_W^2} = \frac{5(57 \mu\text{V})^2}{(85 \mu\text{V})^2} = 2,25 \quad (\text{H.30})$$

qui conduit à

$$s_B^2 = \frac{Ks^2(\bar{V}_j) - \overline{s^2(V_{jk})}}{K} \quad (\text{H.31a})$$

$$s_B^2 = (43 \mu\text{V})^2, \quad \text{ou} \quad s_B = 43 \mu\text{V}$$

$$s_W^2 = \overline{s^2(V_{jk})} = (85 \mu\text{V})^2, \quad \text{ou} \quad s_W = 85 \mu\text{V} \quad (\text{H.31b})$$

La variance estimée de $\bar{V}$ est obtenue à partir de $s^2(\bar{V}_j)$, Équation (H.25d), parce que $s^2(\bar{V}_j)$ reflète correctement à la fois les composantes aléatoires de variance intra-jour et inter-jours [voir Équation (H.29)]. Alors

$$\begin{aligned} s^2(\bar{V}) &= s^2(\bar{V}_j)/J \\ &= (57 \mu\text{V})^2/10, \quad \text{ou} \quad s(\bar{V}) = 18 \mu\text{V} \end{aligned} \quad (\text{H.32})$$

avec $s(\bar{V})$ ayant $J - 1 = 9$ degrés de liberté.

Le nombre de degrés de liberté de s_w^2 (et donc de s_w) est $J(K - 1) = 40$ [voir Équation (H.26b)]. Le nombre de degrés de liberté de s_B^2 (et donc de s_B) est le nombre effectif de degrés de liberté de la différence $s_B^2 = s^2(\bar{V}_j) - s^2(V_{jk})/K$ [Équation (H.31a)], mais son estimation est problématique.

H.5.2.7 La meilleure estimation de la différence de potentiel de l'étalon de tension est alors $V_S = \bar{V} = 10,000\,097\text{ V}$, avec $s(\bar{V}) = u_c = 18 \mu\text{V}$ comme donné dans l'Équation (H.32). Cette valeur de u_c et ses 9 degrés de liberté peuvent être comparés à $u_c = 13 \mu\text{V}$ et ses 49 degrés de liberté, résultat obtenu en H.5.2.5 [Équation (H.28b)] lorsqu'on avait rejeté l'existence d'un effet inter-jours.

Dans un mesurage réel, un effet inter-jours apparent doit être, si possible, étudié plus à fond pour déterminer sa cause et on doit aussi vérifier si un effet systématique est présent, ce qui empêcherait l'utilisation de méthodes d'analyse de variance. Comme il a été dit au début de cet exemple, les techniques d'analyse de variance sont conçues pour identifier et évaluer les composantes d'incertitude provenant d'effets aléatoires; elles ne peuvent pas fournir d'information sur les composantes provenant d'effets systématiques.

H.5.3 Le rôle de l'analyse de variance dans la mesure

H.5.3.1 Cet exemple d'étalon de tension illustre ce qui est généralement appelé un plan emboîté équilibré à un niveau. C'est un plan à un niveau parce qu'il y a un seul niveau d'«emboîtement» des observations, avec un seul facteur, le jour pendant lequel sont faites les observations, que l'on fait varier pendant le mesurage. Il est équilibré parce que l'on effectue le même nombre d'observations chaque jour. Une analyse semblable à celle qui est présentée dans cet exemple peut être utilisée pour déterminer s'il existe un «effet opérateur», un «effet instrument», un «effet laboratoire», un «effet échantillon» ou même un «effet méthode» dans un mesurage particulier. Ainsi, dans l'exemple, on pourrait imaginer de remplacer les observations faites durant différents jours J par des observations faites le même jour mais avec différents opérateurs J ; la composante inter-jours de la variance devient alors une composante de variance associée aux différents opérateurs.

H.5.3.2 Comme noté en H.5, les méthodes d'analyse de variance sont largement utilisées pour la certification des matériaux de référence (MR) par essais interlaboratoires. Une telle certification implique habituellement d'avoir un nombre de laboratoires indépendants, également compétents, qui mesurent les échantillons d'un matériau dont on veut certifier une propriété. On suppose généralement que les différences entre les résultats individuels, à la fois inter- et intra-laboratoires, sont de nature statistique sans se soucier des causes. Chaque moyenne de laboratoire est considérée comme une estimation non biaisée de la propriété du matériau et la moyenne non pondérée des moyennes des laboratoires est habituellement supposée être la meilleure estimation de cette propriété.

Une certification de matériau de référence pourrait impliquer I différents laboratoires; chacun mesurant la propriété recherchée de J différents échantillons du matériau, avec chaque mesurage d'un échantillon consistant en K observations répétées indépendantes. Le nombre total d'observations est alors IJK et le nombre total d'échantillons est IJ . C'est un exemple de plan emboîté équilibré à deux niveaux, analogue à l'exemple de l'étalon de tension à un niveau ci-dessus. Dans le cas présent, il y a deux niveaux d'«emboîtement» des observations avec deux facteurs différents, échantillon et laboratoire, que l'on fait varier pendant le mesurage. Le modèle est équilibré parce que chaque échantillon est observé le même nombre (K) de fois dans chaque laboratoire et chaque laboratoire mesure le même nombre (J) d'échantillons. Par analogie supplémentaire avec l'exemple de l'étalon de tension, dans le cas du matériau de référence, l'analyse des données a pour objectif de rechercher l'existence possible d'un effet inter-échantillons et d'un effet inter-laboratoires et de déterminer l'incertitude convenable à attribuer à la meilleure estimation de la

valeur de la propriété à certifier. En accord avec le paragraphe précédent, cette estimation est supposée être la moyenne des I moyennes des laboratoires, qui est aussi la moyenne des IJK observations.

H.5.3.3 Le paragraphe 3.4.2 a mis en évidence l'importance de la variation des grandeurs d'entrée dont dépend un résultat de mesure, de sorte que son incertitude soit fondée sur des données observées évaluées statistiquement. Les plans emboîtés et l'analyse des données résultantes par les méthodes d'analyse de variance peuvent être utilisés avec succès dans de nombreuses situations de mesure rencontrées dans la pratique.

Cependant, comme indiqué en 3.4.1, il est rarement praticable de faire varier toutes les grandeurs d'entrée en raison des limites imposées par le temps et les ressources; au mieux, dans la plupart des situations pratiques de mesure, on peut seulement évaluer quelques composantes d'incertitude par utilisation de méthodes d'analyse de variance. Comme signalé en 4.3.1, de nombreuses composantes doivent être évaluées sur la base de jugements scientifiques en utilisant la totalité de l'information disponible sur la variabilité possible des grandeurs d'entrée en question; dans de nombreux cas, on ne peut évaluer une composante d'incertitude, telle que celle qui provient d'un effet inter-échantillons, d'un effet inter-laboratoires, d'un effet inter-instruments ou d'un effet inter-opérateurs, par l'analyse statistique de séries d'observations mais il faut l'évaluer à partir de l'ensemble des informations disponibles.

H.6 Mesurages par rapport à une échelle de repérage: dureté

La dureté est un exemple de concept physique qui ne peut pas être quantifié sans faire référence à une méthode de mesure; il n'y a pas d'unité de dureté indépendante d'une telle méthode. La grandeur «dureté» est différente des grandeurs mesurables classiques en ce qu'elle ne peut pas s'introduire dans des équations algébriques pour définir d'autres grandeurs mesurables (bien qu'elle soit parfois utilisée dans des équations empiriques qui relient la dureté à une autre propriété pour une catégorie de matériaux). Sa valeur est déterminée par un mesurage conventionnel, celui d'une dimension linéaire d'une indentation dans un bloc du matériau auquel on s'intéresse, ou *bloc échantillon*. Le mesurage est fait en conformité avec une norme écrite qui comporte une description du dispositif d'indentation, appelé «pénétrateur», de la construction de la machine d'essai qui permet d'appliquer le pénétrateur et de la manière dont la machine est utilisée. Il existe plusieurs normes de dureté de sorte qu'il y a plusieurs échelles de dureté.

La dureté exprimée est une fonction (qui dépend de l'échelle considérée) de la dimension linéaire mesurée. Dans l'exemple donné dans ce paragraphe, c'est une fonction linéaire de la moyenne arithmétique des profondeurs de cinq indentations répétées, mais pour certaines autres échelles, la fonction n'est pas linéaire.

Les étalons nationaux sont des machines étalons réalisées dans ce but (il n'y a pas de réalisation étalon au niveau international); une comparaison entre une machine particulière et la *machine étalon nationale* se fait par utilisation d'un *bloc étalon de transfert*.

H.6.1 Le problème de mesure

Dans cet exemple, la dureté d'un bloc échantillon de matériau est déterminée sur l'échelle «Rockwell C» en utilisant une machine qui a été étalonnée par rapport à la machine étalon nationale. L'unité d'échelle pour la dureté Rockwell C est 0,002 mm, avec la dureté sur cette échelle définie comme $100 \times (0,002 \text{ mm})$ moins la moyenne des profondeurs, mesurées en millimètre, de cinq indentations. La valeur de cette grandeur, divisée par l'unité d'échelle Rockwell 0,002 mm, est appelée «indice de dureté HRC». Dans le présent exemple, la grandeur est simplement appelée «dureté», symbole $h_{\text{Rockwell C}}$, et la valeur numérique de la dureté exprimée en unités Rockwell de longueur est appelée «indice de dureté», symbole $H_{\text{Rockwell C}}$.

H.6.2 Modèle mathématique

À la moyenne des profondeurs des indentation faites dans le bloc échantillon par la machine utilisée pour déterminer sa dureté, ou *machine d'étalonnage*, on doit ajouter des corrections pour déterminer la moyenne des profondeurs des indentations qui auraient été faites dans le même bloc par la machine étalon nationale.

Alors

$$\begin{aligned} h_{\text{Rockwell C}} &= f(\bar{d}, \Delta_c, \Delta_b, \Delta_s) \\ &= 100(0,002 \text{ mm}) - \bar{d} - \Delta_c - \Delta_b - \Delta_s \end{aligned} \quad (\text{H.33a})$$

$$H_{\text{Rockwell C}} = h_{\text{Rockwell C}} / (0,002 \text{ mm}) \quad (\text{H.33b})$$

où

$\bar{d}$ est la moyenne arithmétique des profondeurs des cinq indentations faites par la machine d'étalonnage dans le bloc échantillon;

Δ_c est la correction obtenue par une comparaison de la machine d'étalonnage avec la machine étalon nationale en utilisant un bloc étalon de transfert, égale à la moyenne des profondeurs des 5m indentations faites par la machine étalon nationale sur ce bloc, moins la moyenne des profondeurs des 5n indentations faites sur le même bloc par la machine d'étalonnage;

Δ_b est la différence de dureté (exprimée sous forme d'une différence de profondeur moyenne d'indentation) entre les deux parties du bloc étalon de transfert utilisées respectivement pour les indentations par les deux machines, différence supposée être égale à zéro; et

Δ_s est l'erreur due au manque de répétabilité de la machine étalon nationale et à la définition incomplète de la grandeur dureté. Bien que l'on doive supposer que Δ_s soit égal à zéro, il a une incertitude-type associée égale à $u(\Delta_s)$.

Puisque les dérivées partielles $\partial f / \partial \bar{d}$, $\partial f / \partial \Delta_c$, $\partial f / \partial \Delta_b$, et $\partial f / \partial \Delta_s$ de la fonction de l'Équation (H.33a) sont toutes égales à -1 , l'incertitude-type composée $u_c(h)$ de la dureté du bloc échantillon telle que mesurée par la machine d'étalonnage est simplement donnée par

$$u_c^2(h) = u^2(\bar{d}) + u^2(\Delta_c) + u^2(\Delta_b) + u^2(\Delta_s) \quad (\text{H.34})$$

où, pour simplifier la notation $h \equiv h_{\text{Rockwell C}}$.

H.6.3 Variances contributives

H.6.3.1 Incertitude de la profondeur moyenne d'indentation $\bar{d}$ du bloc échantillon, $u(\bar{d})$

Incertitude des observations répétées. La stricte répétition d'une observation n'est pas possible parce qu'on ne peut pas faire une nouvelle indentation à l'emplacement d'une indentation précédente. Puisque chaque indentation doit être faite à un emplacement différent, toute variation des résultats comprend l'effet des variations de dureté entre les différents emplacements. Alors, $u(\bar{d})$, incertitude-type de la moyenne des profondeurs de cinq indentations sur le même bloc échantillon par la machine d'étalonnage, est pris égal à $s_p(d_k) / \sqrt{5}$, où $s_p(d_k)$ est l'écart-type expérimental d'un ensemble de profondeurs d'indentation déterminées par des mesurages «répétés» sur un bloc réputé avoir une dureté très uniforme (voir 4.2.4).

Incertitude d'indication. Bien que la correction sur $\bar{d}$ due à l'affichage de la machine d'étalonnage soit égale à zéro, il existe une incertitude sur $\bar{d}$ due à l'incertitude de l'indication de profondeur, elle-même due à la résolution δ de l'affichage et donnée par $u^2(\delta) = \delta^2/12$ (voir F.2.2.1). La variance estimée de $\bar{d}$ est alors

$$u^2(\bar{d}) = s^2(d_k) / 5 + \delta^2 / 12 \quad (\text{H.35})$$

H.6.3.2 Incertitude de la correction pour la différence entre les deux machines, $u(\Delta_c)$

Comme indiqué en H.6.2, Δ_c est la correction pour la différence entre la machine étalon nationale et la machine d'étalonnage. Cette correction peut s'exprimer comme $\Delta_c = z'_S - z'$, où $z'_S = \left(\sum_{i=1}^m \bar{z}_{S,i} \right) / m$ est la

profondeur moyenne de $5m$ indentations faites par la machine étalon nationale sur le bloc étalon de transfert, et $z' = \left(\sum_{i=1}^n \bar{z}_i \right) / n$ est la profondeur moyenne des $5n$ indentations faites par la machine d'étalonnage sur le même bloc. Supposant alors que, pour la comparaison, l'incertitude due à la résolution de l'affichage de chaque machine soit négligeable, la variance estimée de Δ_c est

$$u^2(\Delta_c) = \frac{s_{av}^2(\bar{z}_S)}{m} + \frac{s_{av}^2(\bar{z})}{n} \quad (\text{H.36})$$

où

$s_{av}^2(\bar{z}_S) = \left[\sum_{i=1}^m s^2(\bar{z}_{S,i}) \right] / m$ est la moyenne des variances expérimentales des moyennes de chacune des m séries d'indentations $z_{S,ik}$ faites par la machine étalon;

$s_{av}^2(\bar{z}) = \left[\sum_{i=1}^n s^2(\bar{z}_i) \right] / n$ est la moyenne des variances expérimentales des moyennes de chacune des n séries d'indentations z_{ik} faites par la machine d'étalonnage.

NOTE Les variances $s_{av}^2(\bar{z}_S)$ et $s_{av}^2(\bar{z})$ sont des estimations de variance sur ensembles de données. Voir la présentation de l'Équation (H.26b) de H.5.2.2.

H.6.3.3 Incertitude de la correction due aux variations de dureté du bloc étalon de transfert, $u(\Delta_b)$

La Recommandation internationale R 12 de l'OIML *Vérification et étalonnage des blocs normalisés de dureté Rockwell C* exige que les profondeurs maximale et minimale de l'indentation obtenue à partir de cinq mesurages sur le bloc étalon de transfert ne diffèrent pas de plus d'une fraction x de la profondeur moyenne d'indentation, où x est une fonction du niveau de dureté. Supposons alors que la différence maximale des profondeurs d'indentation sur le bloc entier soit xz' , où z' est défini tel qu'en H.6.3.2 avec $n = 5$. Supposons aussi que la différence maximale soit décrite par une loi de probabilité triangulaire autour de la valeur moyenne $xz'/2$ (à partir de l'hypothèse vraisemblable que les valeurs proches de la valeur centrale sont plus probables que les valeurs extrêmes — voir 4.3.9). Si, dans l'Équation (9b) de 4.3.9 $a = xz'/2$, alors la variance estimée de la correction de la profondeur moyenne d'indentation due aux différences des duretés présentées respectivement à la machine étalon et à la machine d'étalonnage est

$$u^2(\Delta_b) = (xz')^2 / 24 \quad (\text{H.37})$$

Comme indiqué en H.6.2, on suppose que la meilleure estimation de la correction Δ_b est égale à zéro.

H.6.3.4 Incertitude de la machine étalon nationale et de la définition de la dureté, $u(\Delta_S)$

L'incertitude de la machine étalon nationale, de même que l'incertitude due à une définition incomplète de la grandeur dureté, est donnée sous forme d'écart-type estimé $u(\Delta_S)$ (grandeur dont la dimension est une longueur).

H.6.4 L'incertitude-type composée, $u_c(h)$

En collationnant les termes individuels présentés de H.6.3.1 à H.6.3.4 et en les substituant dans l'Équation (H.34) on obtient pour la variance estimée de la mesure de dureté

$$u_c^2(h) = \frac{s^2(d_k)}{5} + \frac{\delta^2}{12} + \frac{s_{av}^2(\bar{z}_S)}{m} + \frac{s_{av}^2(\bar{z})}{n} + \frac{(xz')^2}{24} + u^2(\Delta_S) \quad (\text{H.38})$$

et l'incertitude-type composée est $u_c(h)$.

H.6.5 Exemple numérique

Les données pour cet exemple sont résumées dans le Tableau [H.10](#).

Tableau H.10 — Résumé des données pour la détermination de la dureté d'un bloc échantillon sur l'échelle Rockwell C

Source d'incertitude	Valeur
Profondeur moyenne $\bar{d}$ de 5 indentations faites par la machine d'étalonnage sur le bloc échantillon: 0,072 mm	36,0 unités Rockwell
Indice de dureté indiqué pour le bloc échantillon à partir des 5 indentations: $H_{\text{Rockwell C}} = h_{\text{Rockwell C}}/(0,002 \text{ mm}) = [100(0,002 \text{ mm}) - 0,072 \text{ mm}]/(0,002 \text{ mm})$ (voir H.6.1)	64,0 HRC
Écart-type expérimental $s_p(d_k)$ de l'ensemble des données relatives aux profondeurs des indentations faites par la machine d'étalonnage sur un bloc de dureté uniforme	0,45 unité Rockwell
Résolution δ de l'affichage de la machine d'étalonnage	0,1 unité Rockwell
$s_{av}(\bar{z}_S)$, racine carrée de la moyenne des variances expérimentales des moyennes de m séries d'indentations faites par la machine étalon nationale sur le bloc étalon de transfert	0,10 unité Rockwell, $m = 6$
$s_{av}(\bar{z})$, racine carrée de la moyenne des variances expérimentales des moyennes de n séries d'indentations faites par la machine d'étalonnage sur le bloc étalon de transfert	0,11 unité Rockwell, $n = 6$
Variation relative permise x de la profondeur de pénétration sur le bloc étalon de transfert	$1,5 \times 10^{-2}$
Incertitude-type $u(\Delta_S)$ de la machine étalon nationale et de la définition de la dureté	0,5 unité Rockwell

L'échelle est en Rockwell C, désignée par HRC. L'unité d'échelle Rockwell est 0,002 mm, ce qui signifie donc que dans le Tableau [H.10](#) et pour la suite, «36,0 unités Rockwell» veut dire $36,0 \times (0,002 \text{ mm}) = 0,072 \text{ mm}$ par exemple et que c'est simplement une manière commode d'exprimer les données et les résultats.

Si les valeurs pour les grandeurs correspondantes données au Tableau [H.10](#) sont reportées dans l'Équation ([H.38](#)), on obtient les deux expressions suivantes:

$$u_c^2(h) = \left[\frac{0,45^2}{5} + \frac{0,1^2}{12} + \frac{0,10^2}{6} + \frac{0,11^2}{6} + \frac{(0,015 \times 36,0)^2}{24} + 0,5^2 \right] (\text{unité Rockwell})^2$$

$$= 0,307 (\text{unité Rockwell})^2$$

$$u_c(h) = 0,55 \text{ unité Rockwell} = 0,0011 \text{ mm}$$

où il est suffisant de prendre $z' = \bar{d} = 36,0$ unités Rockwell pour calculer l'incertitude.

Si l'on suppose $\Delta_c = 0$, la dureté du bloc échantillon est alors

$$h_{\text{Rockwell C}} = 64,0 \text{ unités Rockwell ou } 0,1280 \text{ mm avec une incertitude-type composée } u_c = 0,55 \text{ unité Rockwell ou } 0,0011 \text{ mm.}$$

L'indice de dureté du bloc est $h_{\text{Rockwell C}}/(0,002 \text{ mm}) = (0,1280 \text{ mm})/(0,002 \text{ mm})$, ou

$$H_{\text{Rockwell C}} = 64,0 \text{ HRC avec une incertitude-type composée } u_c = 0,55 \text{ HRC.}$$

En plus de la composante d'incertitude due à la machine étalon nationale de dureté et à la définition de la dureté, $u(\Delta_S) = 0,5$ unité Rockwell, les composantes de l'incertitude significatives sont celles de la répétabilité de la machine, $s_p(d_k)/\sqrt{5} = 0,20$ unité Rockwell; et la variation de dureté du bloc étalon de transfert qui est $(xz')^2/24 = 0,11$ unité Rockwell. Le nombre effectif de degrés de liberté de u_c peut être évalué en utilisant la formule de Welch-Satterthwaite de la manière développée en [H.1.6](#).

Annexe J *

Liste des principaux symboles

a	demi-largeur d'une loi rectangulaire des valeurs possibles d'une grandeur d'entrée X_i : $a = (a_+ - a_-)/2$
a_+	limite supérieure d'une grandeur d'entrée X_i
a_-	limite inférieure d'une grandeur d'entrée X_i
b_+	limite supérieure de l'écart entre une grandeur d'entrée X_i et son estimation x_i : $b_+ = a_+ - x_i$
b_-	limite inférieure de l'écart entre une grandeur d'entrée X_i et son estimation x_i : $b_- = x_i - a_-$
c_i	dérivée partielle ou coefficient de sensibilité: $c_i \equiv \partial f / \partial x_i$
f	relation fonctionnelle entre un mesurande Y et les grandeurs d'entrée X_i dont Y dépend et entre l'estimation de sortie y et les estimations d'entrée x_i dont y dépend
$\partial f / \partial x_i$	dérivée partielle par rapport à une grandeur d'entrée X_i de la relation fonctionnelle f entre un mesurande Y et les grandeurs d'entrée X_i dont Y dépend, relation évaluée pour les estimations x_i des X_i $\partial f / \partial x_i = \partial f / \partial X_i \big _{x_1, x_2, \dots, x_N}$
k	facteur d'élargissement utilisé pour calculer l'incertitude élargie $U = k u_c(y)$ d'une estimation de sortie y à partir de son incertitude-type composée $u_c(y)$, où U définit un intervalle $Y = y \pm U$ ayant un niveau de confiance élevé
k_p	facteur d'élargissement utilisé pour calculer l'incertitude élargie $U_p = k_p u_c(y)$ d'une estimation de sortie y à partir de son incertitude-type composée $u_c(y)$, où U_p définit un intervalle $Y = y \pm U_p$ ayant un niveau de confiance spécifié p élevé
n	nombre d'observations répétées
N	nombre de grandeurs d'entrées X_i dont dépend un mesurande Y
p	probabilité; niveau de confiance: $0 \leq p \leq 1$
q	grandeur variant de manière aléatoire, décrite par une loi de probabilité
$\bar{q}$	moyenne arithmétique de n observations répétées indépendantes q_k d'une grandeur q variant de manière aléatoire estimation de l'espérance mathématique ou de la moyenne μ_q de la loi de probabilité de q

* **Note de bas de page à la version 2008:**

Au moment de la publication initiale du GUM, une règle rédactionnelle interdisait l'utilisation de la lettre I pour désigner une annexe. C'est pourquoi la numérotation des annexes saute directement de H à J.

q_k	k ième observation répétée indépendante d'une grandeur q variant de manière aléatoire
$r(x_i, x_j)$	coefficient de corrélation estimé, associé aux estimations d'entrée x_i et x_j qui estiment les grandeurs d'entrée X_i et X_j : $r(x_i, x_j) = u(x_i, x_j) / [u(x_i)u(x_j)]$
$r(\bar{X}_i, \bar{X}_j)$	coefficient de corrélation estimé des moyennes d'entrée $\bar{X}_i$ et $\bar{X}_j$, déterminées à partir de n paires indépendantes d'observations simultanées répétées $X_{i,k}$ et $X_{j,k}$ de X_i et X_j : $r(\bar{X}_i, \bar{X}_j) = s(\bar{X}_i, \bar{X}_j) / [s(\bar{X}_i)s(\bar{X}_j)]$
$r(y_i, y_j)$	coefficient de corrélation estimé associé aux estimations de sortie y_i et y_j lorsqu'on détermine deux ou plusieurs mesurandes ou grandeurs de sortie dans le même mesurage
s_p^2	estimation de la variance composée ou estimée sur un ensemble de données
s_p	écart-type expérimental estimé sur un ensemble de données, égal à la racine carrée de s_p^2
$s^2(\bar{q})$	variance expérimentale de la moyenne $\bar{q}$
	estimation de la variance σ^2/n de $\bar{q}$: $s^2(\bar{q}) = s^2(q_k) / n$
	variance estimée obtenue par une évaluation de Type A
$s(\bar{q})$	écart-type expérimental de la moyenne $\bar{q}$, égal à la racine carrée de $s^2(\bar{q})$
	estimateur biaisé de $\sigma(\bar{q})$ (voir C.2.21 , Note)
	incertitude-type obtenue par une évaluation de Type A
$s^2(q_k)$	variance expérimentale déterminée à partir de n observations répétées indépendantes q_k de q
	estimation de la variance σ^2 de la loi de probabilité de q
$s(q_k)$	écart-type expérimental, égal à la racine carrée de $s^2(q_k)$
	estimateur biaisé de l'écart-type σ de la loi de probabilité de q
$s^2(\bar{X}_i)$	variance expérimentale de la moyenne d'entrée $\bar{X}_i$, déterminée à partir de n observations répétées indépendantes $X_{i,k}$ de X_i
	variance estimée obtenue par une évaluation de Type A
$s(\bar{X}_i)$	écart-type expérimental de la moyenne d'entrée $\bar{X}_i$, égal à la racine carrée de $s^2(\bar{X}_i)$
	incertitude-type obtenue par une évaluation de Type A
$s(\bar{q}, \bar{r})$	estimation de la covariance des moyennes $\bar{q}$ et $\bar{r}$ qui estiment les espérances mathématiques μ_q et μ_r de deux grandeurs q et r , variant de manière aléatoire, déterminées à partir de n paires indépendantes d'observations simultanées répétées q_k et r_k de q et r
	covariance estimée obtenue par une évaluation de Type A
$s(\bar{X}_i, \bar{X}_j)$	estimation de la covariance des moyennes d'entrée $\bar{X}_i$ et $\bar{X}_j$, déterminées à partir de n paires indépendantes d'observations simultanées répétées $X_{i,k}$ et $X_{j,k}$ de X_i et X_j
	covariance estimée obtenue par une évaluation de Type A
$t_p(v)$	facteur t de la loi de t pour v degrés de liberté, correspondant à une probabilité donnée p

$t_p(v_{\text{eff}})$	facteur t de la loi de t pour v_{eff} degrés de liberté, correspondant à une probabilité donnée p , utilisé pour calculer une incertitude élargie U_p
$u^2(x_i)$	variance estimée associée à l'estimation d'entrée x_i qui estime la grandeur d'entrée X_i NOTE Lorsqu'on détermine x_i à partir de la moyenne arithmétique de n observations répétées indépendantes, $u^2(x_i) = s^2(\bar{X}_i)$ est une variance estimée obtenue par une évaluation de Type A.
$u(x_i)$	incertitude-type d'une estimation d'entrée x_i qui estime une grandeur d'entrée X_i , égale à la racine carrée de $u^2(x_i)$ NOTE Lorsqu'on détermine x_i à partir de la moyenne de n observations répétées indépendantes, $u(x_i) = s(\bar{X}_i)$ est une incertitude-type obtenue par une évaluation de Type A.
$u(x_i, x_j)$	covariance estimée associée à deux estimations d'entrée x_i et x_j qui estiment les grandeurs d'entrée X_i et X_j NOTE Lorsqu'on détermine x_i et x_j à partir de n paires indépendantes d'observations simultanées répétées, $u(x_i, x_j) = s(\bar{X}_i, \bar{X}_j)$ est une covariance estimée obtenue par une évaluation de Type A.
$u_c^2(y)$	variance composée associée à une estimation de sortie y
$u_c(y)$	incertitude-type composée d'une estimation de sortie y , égale à la racine carrée de $u_c^2(y)$
$u_{cA}(y)$	incertitude-type composée d'une estimation de sortie y déterminée à partir d'incertitudes-types et de covariances estimées obtenues seulement à partir d'évaluations de Type A
$u_{cB}(y)$	incertitude-type composée d'une estimation de sortie y déterminée à partir d'incertitudes-types et de covariances estimées obtenues seulement à partir d'évaluations de Type B
$u_c(y_i)$	incertitude-type composée d'une estimation de sortie y_i lorsqu'on détermine deux ou plusieurs mesurandes ou grandeurs de sortie pendant le même mesurage
$u_i^2(y)$	composante de la variance composée $u_c^2(y)$ associée à l'estimation de sortie y produite par la variance estimée $u^2(x_i)$ associée à l'estimation d'entrée x_i : $u_i^2(y) \equiv [c_i u(x_i)]^2$
$u_i(y)$	composante de l'incertitude-type composée $u_c(y)$ de l'estimation de sortie y produite par l'incertitude-type de l'estimation d'entrée x_i : $u_i(y) \equiv c_i u(x_i)$
$u(y_i, y_j)$	covariance estimée associée aux estimations de sortie y_i et y_j déterminées pendant le même mesurage
$u(x_i)/ x_i $	incertitude-type relative de l'estimation d'entrée x_i
$u_c(y)/ y $	incertitude-type composée relative de l'estimation de sortie y
$[u(x_i)/x_i]^2$	variance relative estimée associée à l'estimation d'entrée x_i
$[u_c(y)/y]^2$	variance composée relative associée à l'estimation de sortie y
$\frac{u(x_i, x_j)}{ x_i x_j }$	covariance relative estimée associée aux estimations d'entrée x_i et x_j
U	incertitude élargie de l'estimation de sortie y , égale au produit du facteur d'élargissement k par l'incertitude-type composée $u_c(y)$ de y : $U = k u_c(y)$, qui définit un intervalle $Y = y \pm U$ ayant un niveau de confiance élevé
U_p	incertitude élargie de l'estimation de sortie y , égale au produit du facteur d'élargissement k_p par l'incertitude-type composée $u_c(y)$ de y : $U_p = k_p u_c(y)$, qui définit un intervalle $Y = y \pm U_p$ ayant un niveau de confiance spécifié p élevé

x_i	estimation de la grandeur d'entrée X_i NOTE Lorsque x_i est déterminé à partir de la moyenne arithmétique de n observations répétées indépendantes, on a $x_i = \bar{X}_i$.
X_i	i ème grandeur d'entrée dont dépend le mesurande Y NOTE X_i peut être la grandeur physique ou la variable aléatoire (voir 4.1.1, Note 1).
$\bar{X}_i$	estimation de la valeur de la grandeur d'entrée X_i , égale à la moyenne arithmétique de n observations répétées indépendantes $X_{i,k}$ de X_i
$X_{i,k}$	k ème observation répétée indépendante de X_i
y	estimation du mesurande Y résultat d'un mesurage estimation de sortie
y_i	estimation du mesurande Y_i lorsqu'on détermine deux ou plusieurs mesurandes pendant le même mesurage
Y	un mesurande
$\frac{\Delta u(x_i)}{u(x_i)}$	incertitude relative estimée de l'incertitude-type $u(x_i)$ de l'estimation d'entrée x_i
μ_q	espérance mathématique ou moyenne de la loi de probabilité d'une grandeur q variant de manière aléatoire
ν	nombre de degrés de liberté (en général)
ν_i	nombre de degrés de liberté ou nombre effectif de degrés de liberté d'une incertitude-type $u(x_i)$ d'une estimation d'entrée x_i
ν_{eff}	nombre effectif de degrés de liberté de $u_c(y)$, utilisé pour obtenir $t_p(\nu_{\text{eff}})$ pour le calcul de l'incertitude élargie U_p
ν_{effA}	nombre effectif de degrés de liberté d'une incertitude-type composée déterminé à partir d'incertitudes-types obtenues seulement par des évaluations de Type A
ν_{effB}	nombre effectif de degrés de liberté d'une incertitude-type composée déterminé à partir d'incertitudes-types obtenues seulement par des évaluations de Type B
σ^2	variance d'une loi de probabilité, par exemple d'une grandeur q variant de manière aléatoire, estimée par $s^2(q_k)$
σ	écart-type d'une loi de probabilité, égal à la racine carrée de σ^2 $s(q_k)$ est un estimateur biaisé de σ
$\sigma^2(\bar{q})$	variance de $\bar{q}$, égale à σ^2/n , estimée par $s^2(\bar{q}) = s^2(q_k)/n$
$\sigma(\bar{q})$	écart-type de $\bar{q}$, égal à la racine carrée de $\sigma^2(\bar{q})$ $s(\bar{q})$ est un estimateur biaisé de $\sigma(\bar{q})$
$\sigma^2[s(\bar{q})]$	variance de l'écart-type expérimental $s(\bar{q})$ de
$\sigma[s(\bar{q})]$	écart-type de l'écart-type expérimental $s(\bar{q})$ de $\bar{q}$, égal à la racine carrée de $\sigma^2[s(\bar{q})]$

Bibliographie

- [1] CIPM (1980), *BIPM Proc.-verb. Com. int. poids et mesures* **48**, C1-C30 (en français); BIPM (1980), Rapport BIPM-80/3, *Report on the BIPM enquiry on error statements*, Bur. int. poids et mesures (Sèvres, France) (en anglais)
- [2] KAARLS, R. (1981), *BIPM Proc.-verb. Com. int. poids et mesures* **49**, A1-A12 (en français); Giacomo, P. (1981), *Metrologia* **17**, 73 -74 (en anglais)

NOTE La traduction en langue anglaise de la Recommandation INC-1 (1980) donnée en [0.7](#) de l'[Introduction](#) à la version anglaise de ce *Guide* est celle de la version finale de la Recommandation et elle est extraite d'un rapport interne du BIPM. Elle est en accord avec le texte français de la Recommandation qui fait autorité et qui est donné dans *BIPM Proc.-verb. Com. int. poids et mesures* **49** et reproduit en [A.1](#), Annexe [A](#) de ce *Guide*. La traduction anglaise de la Recommandation INC-1 (1980) donnée dans *Metrologia* **17** est celle d'un projet et elle diffère légèrement de la traduction donnée dans le rapport interne du BIPM et, en conséquence, de celle donnée en [0.7](#) (version anglaise du *Guide*).

- [3] CIPM (1981), *BIPM Proc.-verb. Com. int. poids et mesures* **49**, 8-9, 26 (en français); Giacomo, P. (1982), *Metrologia* **18**, 43-44 (en anglais)
- [4] CIPM (1986), *BIPM Proc.-verb. Com. int. poids et mesures* **54**, 14, 35 (en français); Giacomo, P. (1987), *Metrologia* **24**, 49-50 (en anglais)
- [5] ISO 5725:1986, *Fidélité des méthodes d'essais — Détermination de la répétabilité et de la reproductibilité d'une méthode d'essai normalisée par essais interlaboratoires*, Organisation internationale de normalisation (Genève, Suisse)

NOTE Cette norme est actuellement en révision [*](#). Le projet révisé a un nouveau titre, «Exactitude (justesse et fidélité) de méthodes de mesure et de résultats» et il comporte six parties.

- [6] *Vocabulaire international des termes fondamentaux et généraux de métrologie*, deuxième édition, 1993 [**](#), Organisation internationale de normalisation (Genève, Suisse)

L'abréviation du titre de ce vocabulaire est VIM.

NOTE 1 Les définitions des termes donnés en Annexe [B](#) proviennent du texte français de ce vocabulaire, sous sa forme publiée, moyennant une correction pour le terme «distribution» (de probabilité), correctement appelé «loi» (de probabilité).

NOTE 2 La seconde édition du VIM est publiée par l'Organisation internationale de normalisation (ISO) au nom des sept organisations suivantes qui participent au travail du Groupe technique consultatif 4 de l'ISO (TAG 4), groupe chargé de la mise au point du VIM: le Bureau international des poids et mesures (BIPM), la Commission électrotechnique internationale (CEI), la Fédération internationale de chimie clinique (FICC), l'ISO, l'Union internationale de chimie pure et appliquée (UICPA), l'Union internationale de physique pure et appliquée (UIPPA) et l'Organisation internationale de métrologie légale (OIML).

NOTE3 La première édition du VIM a été publiée par l'ISO en 1984 au nom du BIPM, de la CEI, de l'ISO et de l'OIML.

* Note de bas de page à la version 2008:

L'ISO 5725:1986 a été remplacée par une norme en six parties. L'ISO 5725 comprend les parties suivantes, sous le titre général *Exactitude (justesse et fidélité) des résultats et méthodes de mesure*:

Partie 1: Principes généraux et définitions

Partie 2: Méthode de base pour la détermination de la répétabilité et de la reproductibilité d'une méthode de mesure normalisée

Partie 3: Mesures intermédiaires de la fidélité d'une méthode de mesure normalisée

Partie 4: Méthodes de base pour la détermination de la justesse d'une méthode de mesure normalisée

Partie 5: Méthodes alternatives pour la détermination de la fidélité d'une méthode de mesure normalisée

Partie 6: Utilisation dans la pratique des valeurs d'exactitude

** Note de bas de page à la version 2008:

La troisième édition du vocabulaire a été publiée en 2008, sous le titre JCGM 200:2008, *Vocabulaire international de métrologie — Concepts fondamentaux et généraux et termes associés (VIM)*.

- [7] ISO 3534-1:1993 ^{*}, *Statistiques — Vocabulaire et symboles — Partie 1: Probabilité et termes statistiques généraux*, Organisation internationale de normalisation (Genève, Suisse)
- [8] FULLER, W. A. (1987), *Measurement error models*, John Wiley (New York, N.Y.)
- [9] ALLAN, D. W. (1987), *IEEE Trans. Instrum. Meas.* **IM-36**, 646-654
- [10] DIETRICH, C. F. (1991), *Uncertainty, calibration and probability*, deuxième édition, Adam-Hilger (Bristol)
- [11] MÜLLER, J. W. (1979), *Nucl. Instrum. Meth.* **163**, 241-251
- [12] MÜLLER, J. W. (1984), dans *Precision measurement and fundamental constants II*, Taylor, B. N., and Phillips, W. D., eds., Natl. Bur. Stand. (U.S.) Spec. Publ. 617, US GPO (Washington, D.C.), 375-381
- [13] JEFFREYS, H. (1983), *Theory of probability*, troisième édition, Oxford University Press (Oxford)
- [14] PRESS, S. J. (1989), *Bayesian statistics: principles, models, and applications*, John Wiley (New York, N.Y.)
- [15] BOX, G. E. P., HUNTER, W. G., and HUNTER, J. S. (1978), *Statistics for experimenters*, John Wiley (New York, N.Y.)
- [16] WELCH, B. L. (1936), *J. R. Stat. Soc. Suppl.* **3**, 29-48; (1938), *Biometrika* **29**, 350-362; (1947), *ibid.* **34**, 28-35
- [17] FAIRFIELD-SMITH, H. (1936), *J. Counc. Sci. Indust. Res. (Australia)* **9**(3), 211
- [18] SATTERTHWAITE, F. E. (1941), *Psychometrika* **6**, 309-316; (1946) *Biometrics Bull.* **2**(6), 110-114
- [19] ISO Guide 35:1989 ^{**}, *Certification des matériaux de référence — Principes généraux et statistiques*, deuxième édition, Organisation internationale de normalisation (Genève, Suisse)
- [20] BARKER, T. B. (1985), *Quality by experimental design*, Marcel Dekker (New York, N.Y.)

*** Note de bas de page à la version 2008:**

L'ISO 3534-1:2006 annule et remplace l'ISO 3534-1:1993. Il est à noter que certains termes et définitions ont été révisés. Pour plus d'informations, voir la dernière édition.

**** Note de bas de page à la version 2008:**

Le Guide ISO 35:2006 annule et remplace le Guide ISO 35:1989. Pour plus d'informations, voir la dernière édition.

Index alphabétique

A

aléatoire [3.3.3](#), [E.1.3](#), [E.3.5](#),
[E.3.6](#), [E.3.7](#)
aléatoire, effet voir [effet aléatoire](#)
aléatoire, erreur voir [erreur aléatoire](#)
analyse de variance [4.2.8](#), [H.5](#)
et suiv.
analyse des erreurs [0.2](#)
arithmétique moyenne voir
[moyenne arithmétique](#)

B

bias [3.2.3 Note](#)
BIPM [Préliminaire](#),
[Avant-propos](#), [0.5](#), [7.1.1](#), [A.1](#),
[A.2](#)
Bureau International des Poids et
Mesures voir [BIPM](#)

C

caractéristique [C.2.15](#)
CEI [Préliminaire](#),
[Avant-propos](#), [A.3](#), [B.1](#)
chaîne d'étalonnage [4.2.8 Note](#)
CIPM [Préliminaire](#),
[Avant-propos](#), [0.5](#), [6.1.1](#),
[6.1.2](#), [A.1](#), [A.2](#), [A.3](#)
coefficient de
corrélation [5.2.2](#), [5.2.3](#), [C.3.6](#),
[F.1.2.3](#), [H.2.3](#), [H.2.4](#),
[H.3.2](#), [H.4.2](#)
coefficient de corrélation, chiffres
significatifs pour un [7.2.6](#)
coefficients de
sensibilité [5.1.3](#), [5.1.4](#)
coefficients de sensibilité,
détermination expérimentale
des [5.1.4](#)
Comité International des Poids et
Mesures voir [CIPM](#)
Commission électrotechnique
internationale voir [CEI](#)
conditions de répétabilité [3.1.4](#),
[B.2.15 Note 1](#)
contrôle statistique [3.4.2](#), [4.2.4](#)
conventionnellement vraie d'une
grandeur, valeur voir [valeur conventionnellement vraie d'une grandeur](#)
convolution voir [convolution de lois de probabilité](#)

convolution de lois de
probabilité [4.3.9 Note 2](#), [G.1.4](#),
[G.1.5](#), [G.1.6](#), [G.2.2](#), [G.6.5](#)
correction [3.2](#), [3.2.3](#), [3.2.4](#)
[Note 2](#), [B.2.23](#)
correction, incertitude d'une voir
[incertitude d'une correction](#)
correction, non applicable
d'une [3.2.4 Note 2](#),
[3.4.4](#), [6.3.1 Note](#), [F.2.4.5](#)
corrélation [5.1](#), [5.2](#) et
suiv., [C.2.8](#), [F.1.2](#), [F.1.2.1](#),
[F.1.2.2](#), [F.1.2.3](#), [F.1.2.4](#)
corrélation, élimination
d'une [5.2.4](#), [5.2.5](#),
[F.1.2.4](#), [H.3.5](#)
corrélées, estimation d'entrée ou
grandeurs d'entrées voir
[corrélation](#)
corrélées, estimations de sortie ou
grandeurs de sortie voir
[estimations de sortie corrélées ou grandeurs de sortie corrélées](#)
corrélées, variations
aléatoires voir [variations aléatoires corrélées](#)
corrigé, résultat voir [résultat corrigé](#)
courbe d'erreur d'un instrument
vérifié [F.2.4.2](#)
courbe
d'étalonnage [F.2.4.2](#), [F.2.4.5](#)
covariance [3.3.6](#), [5.2.2](#),
[C.3.4](#), [F.1.2.1](#), [F.1.2.4](#)
covariance de deux moyennes
arithmétiques [5.2.3](#),
[C.3.4](#), [H.2.2](#), [H.2.4](#), [H.4.2](#)
covariance de mesurandes
indépendants voir [estimations de sortie corrélées ou grandeurs de sortie corrélées](#)
covariance, évaluation
expérimentale de la [5.2.5](#),
[C.3.6 Note 3](#)

D

degré de croyance [3.3.5](#),
[E.3.5](#), [E.4.4](#), [E.5.2 Note](#)
degrés de liberté [4.2.6](#),
[C.2.31](#), [E.4.3](#), [G](#), [G.3](#), [G.3.2](#),
[G.3.3](#), [G.6.3](#), [G.6.4](#)

degrés de liberté d'une estimation
de variance effectuée sur un
ensemble de données, (ou d'un
écart-type expérimental effectué
sur un ensemble de
données) [H.1.6](#), [H.3.6 Note](#)
degrés de liberté d'une incertitude
de Type A [G.3.3](#), [G.6.3](#), [G.6.4](#)
degrés de liberté d'une incertitude
de Type B [G.4.2](#), [G.4.3](#),
[G.6.3](#), [G.6.4](#)
degrés de liberté (nombre effectif
de) [6.3.3](#), [G.4](#), [G.4.1](#),
[G.5.4](#), [G.6.2](#) et suiv.
degrés de liberté de composantes
de Type A seulement (nombre
effectif de) [7.2.1](#),
[G.4.1 Note 3](#)
degrés de liberté de composantes
de Type B seulement (nombre
effectif de) [7.2.1](#), [G.4.1 Note 3](#)
densité de
probabilité [4.3.8 Note 2](#), [4.4.2](#),
[4.4.5](#), [4.4.6](#)
dérivées partielles [5.1.3](#)
détermination de l'erreur [3.4.5](#)
distribution d'effectif [3.3.5](#),
[C.2.18](#)
distribution de
fréquence [3.3.5](#), [4.1.6](#),
[C.2.18](#), [E.3.5](#)
droite d'étalonnage [H.3](#) et suiv.

E

écart-type [3.3.5](#), [C.2.12](#),
[C.2.21](#), [C.3.3](#)
écart-type comme mesure de
l'incertitude voir [incertitude, écart-type comme mesure de l'incertitude](#)
écart-type expérimental [4.2.2](#),
[B.2.17](#)
écart-type expérimental de la
moyenne [4.2.3](#), [B.2.17 Note 2](#)
écart-type expérimental de la
moyenne, incertitude de l' voir
[incertitude de l'écart-type expérimental de la moyenne](#)
écart-type expérimental provenant
d'un ensemble de données voir
[variance provenant d'un ensemble de données, estimation de la](#)
écarts-types, propagation de
multiples des [E.3.3](#)

écarts-types, propagation des [E.3](#), [E.3.1](#), [E.3.2](#)
 échantillon, incertitude due à l' voir [incertitude due à l'échantillon](#)
 échantillonnage limité, incertitude due à un voir [incertitude due à un échantillonnage limité](#)
 effectif, distribution d' voir [distribution d'effectif](#)
 effet aléatoire [3.2.2](#), [3.3.1](#), [3.3.3](#), [4.2.2](#), [E.1.1](#), [E.3](#)
 effet systématique [3.2.3](#), [3.2.4](#), [3.3.1](#), [3.3.2](#), [3.3.3](#), [D.6.1](#), [E.1.1](#), [E.3](#), [E.4.4](#)
 élargissement, facteur d' voir [facteur d'élargissement](#)
 ensemble de données, estimation de la variance provenant d'un voir [variance provenant d'un ensemble de données, estimation de la](#)
 ensemble d'informations pour une évaluation de Type B [3.3.5 Note](#), [4.3.1](#), [4.3.2](#), [5.2.5](#)
 entrée, estimation d' voir [estimation d'entrée](#)
 entrée, grandeur d' voir [grandeur d'entrée](#)
 erreur aléatoire [3.2.1](#), [3.2.3](#), [B.2.21](#)
 erreur de mesure [0.2](#), [2.2.4](#), [3.2](#), [3.2.1 Note](#), [3.2.2 Note 2](#), [3.2.3 Note](#), [3.3.1 Note](#), [3.3.2](#), [B.2.19](#), [D](#), [D.4](#), [D.6.1](#), [D.6.2](#), [E.5.1](#) et [suiv.](#)
 erreur et incertitude, confusion entre [3.2.2 Note 2](#), [3.2.3 Note](#), [E.5.4](#)
 erreur maximale admissible [F.2.4.2](#)
 erreur relative [B.2.20](#)
 erreur systématique [3.2.1](#), [3.2.3](#), [B.2.22](#)
 erreur, loi générale de propagation des voir [propagation des erreurs, loi générale de](#)
 espérance mathématique(ou valeur espérée) [3.2.2](#), [3.2.3](#), [4.1.1 Note 3](#), [4.2.1](#), [4.3.7](#), [4.3.8](#), [4.3.9](#), [C.2.9](#), [C.3.1](#), [C.3.2](#)
 estimateur [4.2.7](#), [C.2.25](#)
 estimation [3.1.2](#), [C.2.24](#), [C.2.26](#)
 estimation d'entrée [4.1.4](#), [4.1.6](#), [4.2.1](#)
 estimation de sortie [4.1.4](#), [4.1.5](#), [7.2.5](#)
 estimation d'entrée corrélées ou grandeurs d'entrée corrélées voir [corrélations](#)
 estimations de sortie corrélées ou grandeurs de sortie corrélées [3.1.7](#), [7.2.5](#), [H.2.3](#), [H.2.4](#), [H.3.2](#), [H.4.2](#)

étalonnage, comparaison d' [F.1.2.3 Note](#)
 étalonnage, courbe d' voir [courbe d'étalonnage](#)
 évaluation de la covariance de Type A [5.2.3](#)
 évaluation de la covariance de Type B [5.2.5](#)
 évaluation de Type A de l'incertitude [2.3.2](#), [3.3.3](#), [3.3.5](#), [4.1.6](#), [4.2](#), [4.2.1](#), [4.2.8](#), [4.3.2](#), [4.4.1](#), [4.4.3](#), [E.3.7](#), [F.1](#), [F.1.1.1](#), [F.1.1.4](#)
 évaluation de Type B de l'incertitude [2.3.3](#), [3.3.3](#), [3.3.5](#), [4.1.6](#), [4.3](#), [4.3.1](#), [4.3.11](#), [4.4.4](#), [4.4.6](#), [E.3.7](#), [F.2](#) et [suiv.](#)
 évaluations réalistes de l'incertitude, justification pour des [E.2](#), [E.2.1](#), [E.2.3](#)
 exactitude de mesure [3.1.3](#), [3.4.1](#), [B.2.14](#)
 expérimental, écart-type voir [écart-type, expérimental](#)

F

F, loi de voir [loi de F](#)
 facteur d'élargissement [2.3.6](#), [3.3.7](#), [4.3.4 Note](#), [6.2.1](#), [6.3](#) et [suiv.](#), [G.1.3](#), [G.2.3](#), [G.3.4](#), [G.6.1](#) et [suiv.](#)
 facteur de correction [3.2.3](#), [B.2.24](#)
 facteur *t* [E.3.3](#), [G.3.2](#), [G.3.4](#), [G.4.1](#), [G.5.4](#), [G.6.2](#), [G.6.4](#), [G.6.5](#), [G.6.6](#)
 Fédération internationale de chimie clinique voir [FICC](#)
 FICC [Préliminaire](#), [Avant-propos](#), [B.1](#)
 fonction de densité de probabilité [3.3.5](#), [C.2.5](#)
 fonction de masse [C.2.6](#)
 fonction de répartition [C.2.4](#)
 formule de Welch-Satterthwaite [G.4.1](#), [G.4.2](#), [G.6.2](#), [G.6.4](#)
 fractiles de la loi de *t* [G.3.4 Note](#)
 fréquence [C.2.17](#)
 fréquence relative [E.3.5](#)

G

globale, incertitude voir [incertitude globale](#)
 grandeur d'entrée [4.1.2](#)
 grandeur d'entrée, limite d'une voir [limites d'une grandeur d'entrée](#)
 grandeur d'influence [3.1.5](#), [3.1.6](#), [3.2.3](#), [4.2.2](#), [B.2.10](#)

grandeur de sortie [4.1.2](#)
 grandeur mesurable [B.2.1](#)
 grandeur particulière [3.1.1](#), [B.2.1 Note 1](#)
 grandeur réalisée [D.2](#), [D.2.1](#), [D.3.1](#), [D.3.3](#), [D.4](#)
 grandeur sous contrôle [F.2.4.3](#)
 grandeur, valeur d'une voir [valeur d'une grandeur](#)
 grandeurs d'entrée, classement en catégories des [4.1.3](#)
 grandeurs d'influence aléatoires [F.1.1.3](#), [F.1.1.4](#)
 Groupe de travail sur l'évaluation des incertitudes [Préliminaire](#), [Avant-propos](#), [0.5](#), [3.3.3](#), [6.1.1](#), [6.1.2](#), [A.1](#), [A.2](#), [A.3](#)

H

hasard [F.1.1](#), [F.1.1.3](#), [F.1.1.5](#)
 hiérarchie de mesure [7.1.1](#)
 histogramme [4.4.3](#), [D.6.1 Note 1](#), [H.1.7](#)

I

incertitude d'une correction [3.2.3 Note](#), [3.3.1](#), [3.3.3](#), [D.6.1](#), [E.1.1](#), [E.3](#)
 incertitude d'une grandeur sous contrôle [F.2.4.3](#)
 incertitude d'une observation unique d'un instrument étalonné [F.2.4.1](#)
 incertitude d'une observation unique d'un instrument vérifié [F.2.4.2](#)
 incertitude de l'écart-type expérimental de la moyenne [4.3.2 Note](#), [E.4.3](#)
 incertitude de la méthode de mesure [F.2.5](#), [F.2.5.1](#)
 incertitude de mesure [0.1](#), [0.2](#), [1.1](#), [2.2](#), [2.2.1](#), [2.2.2](#), [2.2.3](#), [2.2.4](#), [3.3](#), [3.3.1](#), [3.3.2](#), [B.2.18](#), [D](#), [D.5](#), [D.5.1](#), [D.5.2](#), [D.5.3](#), [D.6.1](#), [D.6.2](#)
 incertitude due à l'hystérésis [F.2.2.2](#)
 incertitude à la résolution d'une indication numérique [F.2.2.1](#)
 incertitude due à l'échantillon [F.2.6](#) et [suiv.](#)
 incertitude due à un échantillonnage limité [4.3.2 Note](#), [E.4.3](#)
 incertitude due à une définition incomplète du mesurande [3.1.3 Note](#), [D.1.1](#), [D.3.4](#), [D.6.2](#)
 incertitude due aux calculs à précision limitée [F.2.2.3](#)

incertitude élargie [2.3.5](#), [3.3.7](#), [6](#), [6.2.1](#), [6.2.3](#), [G.1.1](#), [G.2.3](#), [G.3.2](#), [G.4.1](#), [G.5.1](#), [G.5.4](#), [G.6.4](#), [G.6.6](#)
 incertitude élargie pour une loi asymétrique [G.5.3](#)
 incertitude élargie relative [7.2.3](#)
 incertitude élargie, expression de l' [7.2.3](#), [7.2.4](#)
 incertitude fournie, qualité et utilité de l' [3.4.8](#)
 incertitude globale [2.3.5 Note 3](#)
 incertitude intrinsèque [D.3.4](#)
 incertitude lorsqu'on n'applique pas une correction [3.4.4](#), [6.3.1 Note](#), [F.2.4.5](#)
 incertitude minimale [D.3.4](#)
 incertitude sûre [E.1.1](#), [E.1.2](#), [E.2.1](#), [E.2.3](#), [E.4.1](#), [F.2.3.2](#)
 incertitude, classement en catégories des composantes de l' [3.3.3](#), [3.3.4](#), [E.3.6](#), [E.3.7](#)
 incertitude, comparaison entre les deux points de vue sur l' [E.5](#) et *suiv.*
 incertitude, décompte double des composantes de l' [4.3.10](#)
 incertitude, définition du terme voir [incertitude de mesure](#)
 incertitude, écart-type comme mesure de l' [E.3.2](#), [E.4](#), [E.4.1](#), [E.4.4](#)
 incertitude, évaluation statistique de l', par variation des grandeurs d'entrée [3.4.1](#), [3.4.2](#), [4.2.8](#), [F.2.1](#), [H.5.3.3](#)
 incertitude, expression de l' [7](#) et *suiv.*
 incertitude, grandeur logique en elle-même pour exprimer l' [0.4](#)
 incertitude, grandeur transférable pour exprimer l' [0.4](#)
 incertitude, groupement des composantes de l' [3.3.3 Note](#), [3.4.3](#), [E.3.7](#)
 incertitude, loi de propagation de l' [3.3.6](#), [3.4.1](#), [5.1.2](#), [E.3](#), [E.3.1](#), [E.3.2](#), [E.3.6](#), [G.6.6](#)
 incertitude, manque de compte rendu explicite de l' [7.1.3](#)
 incertitude, maximum permis d' [F.2.4.2](#)
 incertitude, méthode idéale pour évaluer et exprimer l' [0.4](#)
 incertitude, méthode universelle d'évaluation et d'expression de l' [0.4](#)
 incertitude, résumé de la procédure d'évaluation et d'expression de l' [8](#)
 incertitude, sources d' [3.3.2](#)

incertitude-type [2.3.1](#), [3.3.5](#), [3.3.6](#), [4.1.5](#), [4.1.6](#), [4.2.3](#), [D.6.1](#), [E.4.1](#)
 incertitude-type composée [2.3.4](#), [3.3.6](#), [4.1.5](#), [5](#), [5.1.1](#), [5.1.3](#), [5.1.6](#), [5.2.2](#), [6.1.1](#), [D.6.1](#), [E.3.6](#)
 incertitude-type composée à partir de composantes de Type A seulement [7.2.1](#), [G.4.1 Note 3](#)
 incertitude-type composée à partir de composantes de Type B seulement [7.2.1](#), [G.4.1 Note 3](#)
 incertitude-type composée et comités consultatifs [6.1.1](#), [A.3](#)
 incertitude-type composée et comparaisons internationales [6.1.1](#), [A.3](#)
 incertitude-type composée relative [5.1.6](#), [7.2.1](#)
 incertitude-type composée, calcul numérique de l' [5.1.3 Note 2](#), [5.2.2 Note 3](#)
 incertitude-type composée, expression de l' [7.2.1](#), [7.2.2](#)
 incertitude-type de Type A [3.3.5](#), [4.2.3](#), [C.3.3](#)
 incertitude-type de Type B [3.3.5](#), [4.3.1](#), [C.3.3](#)
 incertitude-type relative [5.1.6](#)
 incertitude-type, évaluation de Type A de l' voir [évaluation de Type A de l'incertitude](#)
 incertitude-type, évaluation de Type B de l' voir [évaluation de Type B de l'incertitude](#)
 incertitude-type, illustration graphique de l'évaluation de l' [4.4](#) et *suiv.*
 incertitudes, arrondissement des [7.2.6](#)
 incertitudes, nombre de chiffres significatifs pour les [7.2.6](#)
 indépendance [5.1](#), [C.3.7](#)
 indépendantes, répétitions voir [répétitions indépendantes](#)
 influence, grandeur d' voir [grandeur d'influence](#)
 informations, ensemble d', pour une évaluation de Type B voir [ensemble d'informations pour une évaluation de Type B](#)
 intervalle de confiance [4.2.3 Note 1](#), [6.2.2](#), [C.2.27](#), [C.2.28](#), [E.3.3](#)
 intervalle de confiance bilatéral [C.2.27](#)
 intervalle de confiance unilatéral [C.2.28](#)
 intervalle statistique de dispersion [C.2.30](#)

intervalle statistique de tolérance [C.2.30 Note 2](#)
 intervalles de confiance, propagation des [E.3.3](#)
 ISO [Préliminaire](#), [Avant-propos](#), [A.3](#), [B.1](#)
 ISO 3534-1 [2.1](#), [C.1](#)
 ISO Groupe consultatif technique sur la métrologie (ISO/TAG 4) [Avant-propos](#)
 ISO/TAG 4 [Avant-propos](#)
 ISO/TAG 4/GT 3 [Avant-propos](#)
 ISO/TAG 4/GT 3, mandat de l' [Avant-propos](#)

L

laboratoires de métrologie nationaux [Avant-propos](#)
 Laplace-Gauss, loi de voir [loi de Laplace-Gauss](#)
 légale, métrologie voir [métrologie légale](#)
 limite d'erreur maximale [E.4.1](#)
 limites de sécurité [6.3.1 Note](#)
 limites d'une grandeur d'entrée [4.3.7](#), [4.3.9](#), [4.4.5](#), [4.4.6](#), [F.2.3.3](#)
 limites maximales voir [limites d'une grandeur d'entrée](#)
 limites supérieure et inférieure d'une grandeur d'entrée voir [limites d'une grandeur d'entrée](#)
 linéarisation d'une relation fonctionnelle [5.1.5](#), [F.2.4.4 Note](#), [5.1.6 Note 1](#)
 loi a priori [4.1.6](#), [4.3.1 Note](#), [4.4.4](#) et *suiv.*, [D.6.1](#), [E.3.4](#), [E.3.5](#), [G.4.2](#), [G.4.3](#)
 loi asymétrique [4.3.8](#), [F.2.4.4](#), [G.5.3](#)
 loi de *F* [H.5.2.3](#)
 loi de Laplace-Gauss [C.2.14](#)
 loi de probabilité [3.3.4](#), [4.1.1 Note 1](#), [4.1.6](#), [4.2.3 Note 1](#), [4.4.1](#), [4.4.4](#), [C.2.3](#), [E.4.2](#), [G.1.4](#), [G.1.5](#)
 loi de propagation de l'incertitude voir [incertitude, loi de propagation de l'](#)
 loi de Student [C.3.8](#), [G.3.2](#)
 loi de *t* [4.2.3 Note 1](#), [C.3.8](#), [G.3](#), [G.3.2](#), [G.3.4](#), [G.4.1](#), [G.4.2](#), [G.5.4](#), [G.6.2](#)
 loi déterminée mathématiquement [F.2.2](#)
 loi normale [4.2.3 Note 1](#), [4.3.2 Note](#), [4.3.4](#), [4.3.5](#), [4.3.6](#), [4.3.9 Note 1](#), [4.4.2](#), [4.4.6](#), [C.2.14](#), [E.3.3](#), [F.2.3.3](#), [G.1.3](#), [G.1.4](#), [G.2.1](#), [G.2.2](#), [G.2.3](#), [G.5.2 Note 2](#)

loi rectangulaire [4.3.7](#), [4.3.9](#),
[4.4.5](#), [F.2.2.1](#), [F.2.2.3](#), [F.2.3.3](#),
[G.2.2 Note 1](#), [G.4.3](#)
loi trapézoïdale [4.3.9](#)
loi triangulaire [4.3.9](#), [4.4.6](#),
[F.2.3.3](#)

M

matériaux de référence,
certification des [H.5](#), [H.5.3.2](#)
matrice de covariance [3.1.7](#),
[5.2.2 Note 2](#), [7.2.5](#), [C.3.5](#), [H.2.3](#)
matrice des coefficients de
corrélacion [7.2.5](#),
[C.3.6 Note 2](#)
mesurable, grandeur voir
[grandeur mesurable](#)
mesurage [3.1](#), [3.1.1](#), [B.2.5](#)
mesurage, exactitude de voir
[exactitude de mesure](#)
mesurages, spectre de, auxquels
ce Guide s'applique [1.1](#)
mesurande [1.2](#), [3.1.1](#),
[3.1.3](#), [B.2.19](#), [D.1](#), [D.1.1](#),
[D.1.2](#), [D.3.4](#)
mesurande, définition ou
spécification du voir
[mesurande](#)
mesurande, différentes valeurs
du [D.6.2](#)
mesurande, incertitude due à une
définition incomplète du voir
[incertitude due à une définition](#)
[incomplète du mesurande](#)
mesurande, meilleur mesurage
possible du [D.3.4](#)
mesurande, valeur
du [3.1.1](#), [3.1.2](#), [3.1.3](#)
mesurandes interdépendants,
covariance de voir [estimations](#)
[de sortie corrélées ou grandeurs](#)
[de sortie corrélées](#)
mesure, méthode de voir
[méthode de mesure](#)
mesure, modèle mathématique
de voir [modèle mathématique](#)
[de mesure](#)
mesure, principe de voir [principe](#)
[de mesure](#)
mesure, résultat de voir [résultat](#)
[d'un mesurage](#)
mesure, rôle de l'analyse de
variance dans la [H.5.3](#) et *suiv.*
méthode de mesure [3.1.1](#), [B.2.7](#)
méthode de mesure, incertitude de
la voir [incertitude de la](#)
[méthode de mesure](#)
méthode de mesure, unité
indépendante de la [H.6](#)
méthode des moindres
carrés [4.2.5](#), [G.3.3](#), [H.3](#),
[H.3.1](#), [H.3.2](#)
métrologie légale [3.4.5](#)

minimale, incertitude voir
[incertitude minimale](#)
modèle mathématique de
mesure [3.1.6](#), [3.4.1](#),
[3.4.2](#), [4.1](#), [4.1.1](#), [4.1.2](#)
moindre carrés, méthode
des voir [méthode des moindres](#)
[carrés](#)
moment centré
d'ordre q [C.2.13](#), [C.2.22](#),
[E.3.1 Note 1](#)
moyenne [C.2.9](#), [C.3.1](#)
moyenne
arithmétique [4.1.4 Note](#), [4.2.1](#),
[C.2.19](#)

N

nécessité d'évaluations de
Type B [F.2.1](#)
niveau de confiance [0.4](#),
[2.2.3 Note 1](#), [2.3.5 Notes 1](#) et
[2](#), [3.3.7](#), [4.3.4](#), [6.2.2](#), [6.2.3](#),
[6.3.1](#), [6.3.3](#), [G](#), [G.1.1](#), [G.1.3](#),
[G.2.3](#), [G.3.2](#), [G.3.4](#), [G.4.1](#),
[G.6.1](#), [G.6.4](#), [G.6.6](#)
niveau de confiance
minimal [F.2.3.2](#)
niveau de
confiance [6.2.2](#), [C.2.29](#)
nombre de degrés de liberté voir
[degrés de liberté](#)
nombre effectif de degrés de
liberté voir [degrés de liberté](#)
non corrigé, résultat voir [résultat](#)
[non corrigé](#)
non linéaire, relation
fonctionnelle voir [relation](#)
[fonctionnelle non linéaire](#)
normale, loi voir [loi normale](#)

O

observations indépendantes
simultanées, paires d' [5.2.3](#),
[C.3.4](#), [F.1.2.2](#), [H.2.2](#), [H.2.4](#),
[H.4.2](#)
observations
répétées [3.1.4](#), [3.1.6](#),
[3.2.2](#), [3.3.5](#), [4.2.1](#), [4.2.3](#), [4.4.1](#),
[4.4.3](#), [5.2.3](#), [E.4.2](#), [E.4.3](#), [F.1](#),
[F.1.1](#), [F.1.1.1](#), [F.1.1.2](#), [G.3.2](#)
OIML [Préliminaire](#),
[Avant-propos](#), [A.3](#), [B.1](#)
Organisation internationale de
métrologie légale voir [OIML](#)
Organisation internationale de
normalisation voir [ISO](#)
origine extérieure, valeur d'entrée
ou grandeur d'entrée d' voir
[valeur d'entrée ou grandeur](#)
[d'entrée d'origine extérieure](#)

P

paramètre [C.2.7](#)
particulière, grandeur voir
[grandeur particulière](#)
plan emboîté
équilibré [H.5.3.1](#), [H.5.3.2](#)
population [C.2.16](#)
précision [B.2.14 Note 2](#)
principe de l'entropie
maximale [4.3.8 Note 2](#)
principe de mesure [B.2.6](#)
probabilité [0.4](#), [2.3.5 Note 1](#),
[3.3.5](#), [3.3.7](#), [4.3.7](#), [4.3.9](#), [6.2.2](#),
[C.2.1](#), [E.3.5](#), [E.3.6](#), [F.2.2.3](#),
[G.1.1](#), [G.1.3](#), [G.3.2](#)
probabilité
élémentaire [C.2.5 Note](#),
[F.2.4.4](#)
probabilité subjective [3.3.5](#),
[D.6.1](#)
probabilité, convolution de lois
de voir [convolution de lois de](#)
[probabilité](#)
probabilité, loi de voir [loi de](#)
[probabilité](#)
procédure de mesure [3.1.1](#),
[7.1.2](#), [B.2.8](#), [F.1.1.2](#)
propagation de l'incertitude, loi
de voir [incertitude, loi de](#)
[propagation de l'](#)
propagation des erreurs, loi
générale de [5.2.2 Note 1](#),
[E.3.2](#)

R

Recommandation 1 (CI-1981),
CIPM [Préliminaire](#), [0.5](#), [6.1.1](#),
[A.2](#), [A.3](#)
Recommandation 1 (CI-1986),
CIPM [0.5](#), [6.1.1](#), [6.1.2](#), [A.3](#)
Recommandation INC-1
(1980) [Préliminaire](#),
[Avant-propos](#), [0.5](#), [0.7](#), [3.3.3](#),
[6.1.1](#), [6.1.2](#), [6.3.3](#), [A.1](#), [A.3](#),
[E](#), [E.2.3](#), [E.3.7](#)
relation
fonctionnelle [4.1.1](#), [4.1.2](#)
relation fonctionnelle non
linéaire [4.1.4 Note](#), [5.1.2 Note](#),
[F.2.4.4 Note](#), [G.1.5](#), [H.1.7](#), [H.2.4](#)
relative, erreur voir [erreur](#)
[relative](#)
répétabilité des résultats de
mesure [B.2.15](#)
répétabilité, conditions de voir
[conditions de répétabilité](#)
répétées, observations voir
[observations répétées](#)
répétitions indépendantes [F.1.1.2](#)
reproductibilité des résultats de
mesure [B.2.16](#)

résultat corrigé [B.2.13](#), [D.3.1](#),
[D.3.4](#), [D.4](#)

résultat d'un mesurage [1.3](#),
[3.1.2](#), [B.2.11](#)

résultat de mesure et son
incertitude, disponibilité de
l'information décrivant
un [7.1.1](#), [7.1.3](#)
résultat de mesure et son
incertitude, expression en détail
d'un [7.1.4](#), [7.2.7](#)

incertitude, formulation pour
l'expression d'un [7.2.2](#), [7.2.4](#)
résultat non corrigé [B.2.12](#)

S

sécurité, limites de voir [limites
de sécurité](#)

série de Taylor [5.1.2](#), [E.3.1](#),
[G.1.5](#), [G.4.2](#), [H.1.7](#), [H.2.4](#)

sortie, estimation de voir
[estimation de sortie](#)

sortie, grandeur de voir
[grandeur de sortie](#)

statistique [4.2.7](#), [C.2.23](#)

Student, loi de voir [loi de
Student](#)

systématique [3.3.3](#), [E.1.3](#),
[E.3.4](#), [E.3.7](#)

systématique, effet voir [effet
systématique](#)

systématique, erreur voir [erreur
systématique](#)

Système international d'unités
(SI) [0.3](#), [3.4.6](#)

T

t , loi de voir [loi de \$t\$](#)

termes de degré plus
élevé [5.1.2 Note](#), [E.3.1](#), [H.1.7](#)

test F [H.5.2.2](#), [H.5.2.4](#)

théorème central
limite [G.1.6](#), [G.2](#), [G.2.1](#),
[G.2.3](#), [G.6.2](#), [G.6.5](#), [G.6.6](#)

U

UICPA [Préliminaire](#),
[Avant-propos](#), [B.1](#)

UIPPA [Préliminaire](#),
[Avant-propos](#), [B.1](#)

Union internationale de chimie pure
et appliquée voir [UICPA](#)

Union internationale de physique
pure et appliquée voir [UIPPA](#)

unité, utilisation d'une valeur
adoptée pour un étalon
comme [3.4.6](#), [4.2.8 Note](#)

V

valeur d'une
grandeur [3.1.1](#), [B.2.2](#)
valeur conventionnellement vraie
d'une grandeur [B.2.4](#)

valeur d'entrée ou grandeur
d'entrée d'origine
extérieure [F.2.3](#), [F.2.3.1](#)

valeur vraie d'une
grandeur [2.2.4](#), [3.1.1 Note](#),
[B.2.3](#), [D](#), [D.3](#), [D.3.1](#), [D.3.4](#),
[D.3.5](#), [E.5.1](#), [E.5.4](#)

valeurs aberrantes [3.4.7](#)

variable aléatoire [4.1.1 Note 1](#),
[4.2.1](#), [4.2.3 Note 1](#), [C.2.2](#),
[C.3.1](#), [C.3.2](#), [C.3.4](#), [C.3.7](#),
[C.3.8](#), [E.3.4](#), [F.1.2.1](#), [G.3.2](#)

variable aléatoire centrée [C.2.10](#)

variance [3.1.7](#), [4.2.2](#), [4.2.3](#),
[C.2.11](#), [C.2.20](#), [C.3.2](#)

variance composée [3.3.6](#), [5.1.2](#)

variance d'Allan [4.2.7 Note](#)

variance de la
moyenne [4.2.3](#), [C.3.2](#)

variance de Type A [4.2.3](#)

variance de Type B [4.3.1](#)

variance expérimentale (ou
estimation de variance) [4.2.2](#),
[H.3.6 Note](#)

variance expérimentale de la
moyenne [4.2.3](#), [C.3.2](#)

variance provenant d'un ensemble
de données, estimation de la (ou

estimation de l'écart-type
expérimental provenant d'un
ensemble de données) [4.2.4](#),
[4.2.8 Note](#), [H.1.3.2](#), [H.3.6 Note](#),
[H.5.2.2](#), [H.5.2.5](#), [H.6.3.1](#),
[H.6.3.2 Note](#)

variance relative [5.1.6](#)

variance relative composée [5.1.6](#)
variance, analyse de voir [analyse
de variance](#)

variations aléatoires
corrélées [4.2.7](#)

VIM [2.1](#), [2.2.3](#), [2.2.4](#), [B.1](#)

Vocabulaire international des
termes fondamentaux et
généraux de métrologie voir
[VIM](#)

