

Travail de Maturité 2009

Le Global Positionning System

Structure et fonctionnement



Roch Jonas

Tutrice :
Mme Rima Halabi Petter

Gymnase cantonal du Bugnon, Lausanne

Résumé

Pratiquant de la montagne lors de mes loisirs, la thématique de la localisation m'a toujours interpellé. Suite à une sortie hivernale, mon frère et moi nous sommes retrouvés dans un brouillard qui, sans le GPS de mon frère, nous aurait égaré pour de bon.

C'est ainsi que la question suivante, qui est aussi la problématique de mon travail, est apparue : comment fonctionne le GPS ?

Dans mon travail, après une brève introduction historique sur la localisation, je présente la structure du système GPS (Global Positioning System), de la configuration spatiale, aux différentes stations au sol qui le gèrent, en passant par les multiples utilisateurs tels que le géomètre, le militaire, le scientifique, sans compter le simple civil. J'expose aussi brièvement les différents systèmes de positionnement par satellite (GNSS), dont Galileo, le système européen, qui sera opérationnel d'ici à quelques années.

Ensuite, j'explique comment on peut déterminer la position des satellites dans un repère cartésien géocentré (ECEF) en se basant sur les célèbres lois de Kepler et sur la gravitation newtonienne. Ces calculs, qui sont à la base de l'élaboration d'almanachs pour les satellites, se basent sur des concepts physiques tels que l'anomalie moyenne et excentrique, qui servent aussi en astronomie, afin de déterminer les positions des planètes.

Puis j'explique comment déterminer la position d'un récepteur en se basant sur la triangulation en trois dimensions. Ce calcul correspond théoriquement à un calcul d'intersection de sphères, mais, à cause de différents problèmes physiques, l'intersection de sphères devient ambiguë, ce qui oblige à mettre au point une méthode itérative pour calculer la position du récepteur.

Après, je présente un programme MATLAB basé sur les calculs de position dont j'ai parlé précédemment qui permet de déterminer la position d'un récepteur, ainsi que d'avoir une idée sur la répartition des satellites dans le ciel, à partir de la position des satellites et de la distance les séparant du récepteur.

J'explique, ensuite, le principe de la mesure de la distance du récepteur au satellite, grâce au traitement du signal par les fonctions de corrélation, selon deux méthodes : la mesure de phase, qui se base sur l'onde porteuse, et la mesure de code qui se base sur des séquences binaires qui ont des structures quasi aléatoires.

Finalement, j'expose les causes physiques des corrections à effectuer sur le temps ainsi que leur prise en charge dans le cas du GPS. Ces différents problèmes physiques sont : la relativité dont j'explique la correction temporelle à effectuer en me basant sur la contraction de Lorentz-FitzGerald, le blueshift gravitationnel qui provoque une augmentation de la fréquence, la troposphère et l'ionosphère qui retardent le signal.

Ce travail m'a permis, premièrement, de me rendre compte de l'importante part des mathématiques dans des domaines comme la géographie, la localisation, l'informatique et l'électronique.

Deuxièmement, ce travail m'a ouvert les yeux sur l'importance d'une bonne gestion des problèmes physiques dès que l'on commence à vouloir une grande précision.

En effet, après ce travail, je ne dirais plus d'un appareil électronique qu'il est "tout bête", mais je penserai à l'important travail mathématique et physique se trouvant derrière. En effet, un récepteur GPS, cache bien sa sophistication derrière son boîtier en plastique !

Table des matières

1	Introduction	3
2	Introduction au système GPS	4
2.1	Historique : des étoiles au GPS	4
2.2	La structure du système GPS	5
2.2.1	Le segment de contrôle	5
2.2.2	Le segment spatial	5
2.2.3	Le segment utilisateur	5
2.3	Principe de fonctionnement de base	5
2.4	Autres GNSS	6
3	Géodésie et différents systèmes de coordonnées	7
3.1	Le repère ECEF	7
3.2	WGS84 ou World Geodetic System 1984	7
3.3	Le système orbital	7
4	D'une orbite à une position ECEF	9
4.1	Gravitation	9
4.1.1	La gravitation Newtonienne	9
4.1.2	Les lois de Kepler	10
4.2	Les ellipses	10
4.2.1	Anomalie moyenne θ_M	11
4.2.2	Anomalie excentrique θ_E	11
4.3	Relations entre l'anomalie moyenne et θ_v	11
4.3.1	De l'anomalie moyenne à l'anomalie excentrique	12
4.3.2	De l'anomalie excentrique à θ_v	13
4.4	Changements de bases	14
4.4.1	Les matrices de rotation	14
4.4.2	Du système de coordonnées orbital au système ECEF	15
5	Calcul de la position	18
5.1	Présentation du problème	18
5.2	La méthode de Newton-Raphson et les polynômes de Taylor	18
5.2.1	Méthode de Moore-Penrose	21
5.3	Dilution Of Precision (DOP)	21
5.4	De la position ECEF à la position WGS84	22
6	Programmation MATLAB	24
7	Transmission et traitement du signal	27
7.1	Composition des signaux GPS	27
7.1.1	Le message de navigation, D(t)	28
7.1.2	$x(t)$ et $y(t)$	28
7.2	Fonctions d'autocorrélation et de corrélation croisée	29
7.3	Mesure de la distance	31

7.3.1	Mesure de code	31
7.3.2	Mesure de phase	32
8	Problèmes physiques	35
8.1	Problèmes temporels	35
8.1.1	Relativité restreinte	35
8.1.2	Blueshift gravitationnel	36
8.2	Correction ionosphérique	36
8.3	Correction troposphérique	37
8.4	Autres problèmes physiques	37
9	Conclusion	38
10	Bibliographie et Remerciements	39
10.1	Bibliographie	39
10.1.1	Livres	39
10.1.2	Sites Internet	39
10.2	Remerciements	40
	Glossaire et abréviations	41

Chapitre 1

Introduction

J'ai choisi de traiter le thème du GPS (Global Positionning System)¹ dans ce travail de maturité, car la question de l'orientation et de la localisation m'a toujours intéressé et concerné. Depuis plusieurs années, j'effectue des randonnées hivernales (peau de phoque) et estivales. Tout en pratiquant ces activités, je me suis rendu compte qu'il est difficile de se localiser par temps de brouillard : un jour, alors que nous rentrions de la Rosablanc (une montagne valaisanne), mon frère et moi fûmes pris dans un épais banc de brouillard. N'ayant pas spécialement préparé la course, nous n'avions pas tiré d'azimuts, ce qui auraient pu nous donner les directions à suivre. Heureusement, mon frère était équipé d'un récepteur GPS, ce qui a permis de nous localiser et de nous amener à bon port. Dès lors, j'ai commencé à m'intéresser aux questions du positionnement et de la localisation. De plus, je me suis souvent posé la question suivante, qui sera aussi la problématique de ce travail : comment fonctionne le GPS ?

Je m'efforcerai, tout au long de ce dossier, d'avoir une démarche organisée et cohérente, présentant le thème sous un aspect technique et mathématique. Toutefois, avant d'entrer dans le vif du sujet, il serait judicieux de présenter le GPS de façon globale.

Le GPS (Global Positionning System) est un système de navigation par satellite, GNSS (Global Navigation Satellite System)², dont les satellites envoient des signaux aux utilisateurs, leur permettant de se localiser. Nous verrons plus tard, dans le texte, les moyens qui permettent cette localisation et l'organisation du système GPS.

Dans ce travail, j'expliquerai le principe général, à savoir, comment fonctionne le GPS ? Tout au long de ce dossier, je vais présenter mon travail, étape par étape, en partant de la définition des systèmes de coordonnées, jusqu'au calcul final qui permet le passage de simples éphémérides de satellites à une position en longitude, latitude et altitude. Les derniers chapitres de mon travail expliqueront pourquoi les équations que j'aurai présentées ne sont pas exactes, en expliquant les problèmes physiques auxquels les satellites et les ondes sont sujets. Finalement, j'approfondirai le fonctionnement du récepteur en parlant du passage d'une onde à un signal informatique. J'essayerai d'être très structuré, mais au pire, si je m'égare, le GPS m'aidera à me retrouver sur le bon chemin !

1. Système de Positionnement Global

2. Système Global de Navigation par Satellite

Chapitre 2

Introduction au système GPS

Ce chapitre est une introduction au GPS. Il explique comment le système est organisé, le cheminement scientifique et historique effectué dès les premiers hommes, jusqu'au GPS à l'usage universel qu'on lui connaît aujourd'hui.

2.1 Historique : des étoiles au GPS

Les premiers moyens de positionnement apparurent avant l'Antiquité, où l'homme utilisait les astres et observait les animaux pour se repérer. Pendant l'antiquité, probablement aux environs de -200 av. J.C, l'astrolabe est inventé. Il permettait de mesurer la latitude en mesurant des angles entre l'horizon et un corps céleste, à l'aide d'abaques. Ensuite, la boussole fut inventée probablement par des Chinois. Bien qu'elle ne donne, seule, aucune information quant à la position, elle est le premier instrument d'orientation fonctionnant par tous types de temps (l'astrolabe demandait un ciel découvert pour faire des mesures précises). Toutefois, la boussole, couplée à des informations sur la vitesse de déplacement, le lieu de départ et des cartes permet d'avoir une idée de la position en fonction du temps de parcours. Toujours en employant les astres, le sextant a été développé dans le courant du 18^{ème} siècle. Il permettait aussi de mesurer la latitude à l'aide de tables. Il faut attendre le milieu du 19^{ème} siècle pour avoir la mesure exacte de la longitude, grâce à des chronomètres de marine suffisamment précis. En fait, il suffisait d'abaques et de déterminer l'heure du passage au zénith du soleil avec l'heure du lieu de départ pour calculer son décalage vers l'est ou l'ouest. Par la suite, il n'y eut plus de grandes avancées technologiques, si ce n'est une augmentation de la précision des mesures.

La situation évolua durant le 20^{ème} siècle, lorsque les ondes furent appliquées à la localisation : le radar pour la navigation maritime et le réseau VOR pour le réseau aérien. Toutefois, il s'avéra que les ondes VOR (VHF Omnidirectional Range) pouvaient être coupées par l'ennemi en temps de guerre. Comme l'aviation se développait de façon fulgurante à cette période et que l'aéronautique demandait une grande précision de localisation, l'idée d'avoir un moyen de positionnement sûr, précis et rapide commença à travailler l'esprit des militaires.

Pendant la deuxième guerre mondiale, l'essor de l'aviation et des missiles longue portée a fait apparaître la nécessité d'avoir un système de navigation permettant d'obtenir, de façon globale et instantanée, la position d'un objet. Avec la guerre froide, cette idée se renforça. Le 4 octobre 1957, le premier satellite, Spoutnik 1, est mis en orbite autour de la Terre par l'URSS.

Suite aux premiers lancements de satellites, le Dr. Ivan Gettings développa un système de navigation global par satellite (GNSS) qui a été concrétisé en 1968, lorsque le président Nixon se rendit compte de l'utilité d'un tel système. En 1973, le projet NAVSTAR-GPS (NAvigation System by Timing And Ranging) est mis au point et financé par le ministère de la défense américain, le DoD (Department of Defense). Ce système a été testé pour la première fois en 1976, avec une précision de 17 mètres. Comme les tests ont été concluants, la deuxième phase du projet commença : la mise en orbite des satellites. Le premier satellite NAVSTAR a été mis en orbite le 21 février 1978.

Jusqu'en 1983, le système NAVSTAR était uniquement réservé à l'armée, mais ensuite, le président américain Reagan a permis l'emploi du système GPS aux civils. Toutefois, le civil n'obtenait qu'une précision de 20 à 100 mètres (contre 10 mètres pour le militaire), car il y avait une dégradation volontaire du signal, SA (Selective Availability). Le président Bill Clinton fit lever cette restriction pour l'usage civil

en mai 2000, ce qui conféra au domaine civil la précision actuelle, c'est à dire une position avoisinant les dix mètres.

2.2 La structure du système GPS

Le système GPS peut être séparé en trois parties : le segment de contrôle, le segment spatial et le segment utilisateur.

2.2.1 Le segment de contrôle

Le segment de contrôle est formé par six stations de contrôle appartenant aux forces armées américaines de l'air (USAF), réparties tout autour du globe en fonction de la longitude.

Le but de ces stations est de contrôler la santé du segment spatial et de maintenir le temps du système, le GPS-time (GPST). De manière plus précise, ces stations permettent de contrôler l'état de santé des satellites ainsi que leur trajectoire, prédire les éphémérides des satellites et les paramètres de l'horloge, mettre à jour les messages de navigation des satellites, commander de petites manœuvres afin de réinitialiser une orbite.

2.2.2 Le segment spatial

Le système GPS est formé de 31 satellites (situation au 27 août 2009) en orbite quasi circulaire (excentricité $< 0,01$) à une altitude de 20'200 km. Leur période est de 11h58 minutes, soit un demi jour sidéral. Ces satellites sont répartis sur six plans orbitaux inclinés 55° par rapport au plan équatorial. Chaque satellite contient plusieurs horloges atomiques, certains ont quatre horloges (deux au rubidium et deux au césium), certains en ont trois au césium et, dans les plans de modernisation du GPS, les prochains satellites auront des masers à hydrogène, qui sont extrêmement précis. Ce sont les stations au sol qui sélectionnent l'horloge la plus précise. En effet, ces horloges perdent ou gagnent moins d'une nanoseconde par jour !

Les satellites sont lancés par blocs qui ont tous des spécifications.

2.2.3 Le segment utilisateur

Le segment utilisateur rassemble l'ensemble des utilisateurs du système, du simple utilisateur aux géomètres et aux militaires. L'ensemble de ces utilisateurs peut être séparé en deux catégories, selon la prestation du système qu'ils utilisent. En effet, le système GPS offre deux types de services :

SPS Standard Positioning Service

Le SPS (service standard de positionnement) est un service offert à tous les utilisateurs, mais qui peut malheureusement être dégradé volontairement, à l'exemple de la SA qui rendait toute mesure imprécise jusqu'en mai 2000. Actuellement, les civils ont libre accès à l'ensemble des signaux GPS, bien que le code P dont je reparlerai au chapitre sur le traitement du signal (chapitre 7), est brouillé par l'AS, l'Anti-Spoofing (anti-mouchard). Néanmoins, la plupart des constructeurs de récepteurs GPS ont trouvé un moyen d'accéder au code P et d'effectuer ainsi des mesures sur deux fréquences (cf. chapitre "Traitement du signal"). Depuis peu de temps, d'autres signaux sont réservés aux civils, leur permettant d'être indépendant et d'avoir la même précision que l'armée.

PPS Precise Positioning Service

Le PPS (service de positionnement précis) est un service réservé aux militaires américains et aux utilisateurs autorisés par le DoD (Department of Defense). Il donne accès à l'intégralité des codes, sans cryptage, cette fois.

2.3 Principe de fonctionnement de base

Le GPS est un système de positionnement fonctionnant sur le principe de la triangulation. On connaît la position des satellites et on connaît les distances les séparant de la position du récepteur. Pour illustrer

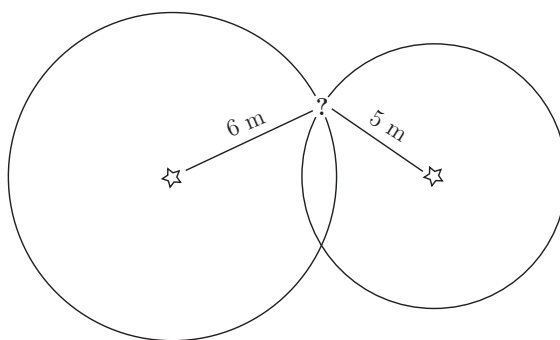


FIGURE 2.1 – Principe de la mesure GPS

cela, la figure 2.1 montre une simplification du problème en deux dimensions. Les étoiles correspondent à des "stations" dont on connaît la position. Le point d'interrogation représente le récepteur. Nous voyons qu'il se situe à une des intersections des deux cercles noirs. Ces cercles correspondent chacun à l'ensemble des points situés à 5 ou 6 mètres des stations. Comme il y a deux points d'intersection, il faudrait rajouter une station pour qu'il n'y ait qu'un seul point d'intersection. On peut déjà deviner que suivant la position des stations, il est plus ou moins difficile de déterminer sa position de façon précise. C'est pour cela que je parlerai dans le chapitre sur le calcul de la position de la géométrie des satellites et la dilution de précision (DOP) qu'elle engendre.

2.4 Autres GNSS

Dans ce travail, je vais pratiquement parler que du NAVSTAR GPS, mais il existe bien d'autres systèmes de navigation :

Galileo est le système lancé par l'Europe dans le but de ne plus être dépendant du système américain. Il sera opérationnel dès 2013. Le système Galileo aura quasiment la même structure que le NAVSTAR GPS et les récepteurs pourront fonctionner avec NAVSTAR GPS et Galileo. Ce système sera compatible avec EGNOS qui est un réseau de stations au sol en Europe, ce qui permettra d'être très précis.

GLONASS est le système russe, fonctionnel depuis des années. Il est en partie compatible avec le système américain. Il est composé d'une flotte de 24 satellites.

Beidou est le système chinois. Actuellement, il n'est composé que de cinq satellites géostationnaires au dessus de la Chine, couvrant ainsi l'intégralité de son territoire. Une deuxième phase de Beidou va être d'envoyer 30 satellites non géostationnaires afin de couvrir l'entier de la Terre.

L'unique raison d'être de ce système est de s'affranchir de la dépendance des Etats-Unis.

Le Japon et l'Inde sont en train de développer des systèmes locaux, composés de satellites géostationnaires.

Tous les principes de fonctionnements, calculs et problèmes physiques propres au GPS le sont également pour tous les GNSS.

Chapitre 3

Géodésie et différents systèmes de coordonnées

3.1 Le repère ECEF

Le système GPS emploie un système de coordonnées cartésien pour tous les calculs : le système ECEF. ECEF vient de l'anglais Earth-Centered, Earth-Fixed, ce qui signifie, en français, centré à la Terre, immobile par rapport à la Terre. En effet, ce système a son origine fixée au centre de masse de la Terre et il tourne avec la même vitesse angulaire que la Terre.

L'axe z de ce système pointe l'axe de rotation de la Terre, l'axe polaire. Les axes x et y sont dans le plan de l'équateur. L'axe x est aligné avec le méridien de Greenwich. En fait, il se base sur le WGS84 (World Geodetic System 1984) qui fixe les formes et les dimensions de la Terre. Toutes les coordonnées en ECEF sont en mètres.

3.2 WGS84 ou World Geodetic System 1984

Le WGS84 définit l'ensemble des coordonnées de la Terre, ainsi que ses formes de base. C'est sur ce système que se base le GPS avec son système cartésien ECEF et pour les projections (latitude, longitude et altitude). Il a été développé par le département de la défense des Etats-Unis, grâce à des observations par satellites.

D'après le WGS84, la Terre est un ellipsoïde de nom IAG-GRS80, circulaire à l'équateur et écrasé aux pôles. Ces dimensions sont de, selon la figure 2.1 :

- $R_{NS} = 6'378'137$ mètres
- $R_{EO} = 6'356'752$ mètres

L'écrasement w de cet ellipsoïde est de 0.00335281 et correspond à $1 - \frac{R_{NS}}{R_{EO}}$.

Ce système fixe les définitions de la latitude et de la longitude :

- La *latitude* correspond à l'angle entre le plan de l'équateur et la perpendiculaire à l'ellipsoïde terrestre. Elle est mesurée en degrés, minutes, secondes. La latitude zéro est à l'équateur et les latitudes vont de 90° Sud et 90° Nord.
- La *longitude* est l'angle entre le méridien d'origine, le centre de la Terre et le méridien sur lequel on est situé. Elle s'exprime en degrés, minutes, secondes. Un méridien est une ligne imaginaire reliant les deux pôles, le long de l'ellipsoïde. Le système WGS84 fixe le méridien zéro proche de Greenwich.

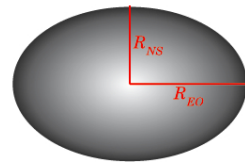


FIGURE 3.1 – Ellipsoïde.

3.3 Le système orbital

Comme la rotation de la Terre n'influence pas l'orbite d'un satellite, les satellites n'ont pas besoin de prendre en compte la rotation de la Terre dans leur système de coordonnées. Par conséquent, on donne aux satellites un système de coordonnées dont les axes X et Y sont dans le plan orbital du satellite. L'axe X est confondu avec le semi-grand axe de l'ellipse trajectoire du satellite. Le centre de masse de la Terre

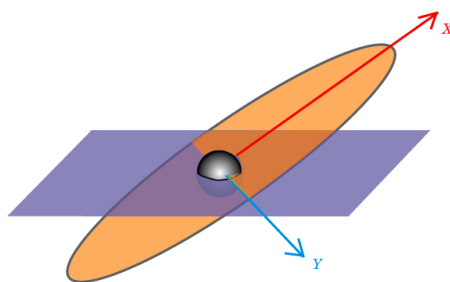


FIGURE 3.2 – Plan de l'écliptique et plan orbital.

est un des foyer de l'ellipse trajectoire du satellite, ainsi que l'origine du système. L'axe Y part donc du centre de la Terre et pointe le nœud ascendant.

Le nœud ascendant est l'endroit où l'orbite du satellite traverse le plan équatorial en passant de l'hémisphère Sud à l'hémisphère Nord.

Chapitre 4

D'une orbite à une position ECEF

4.1 Gravitation

4.1.1 La gravitation Newtonienne

Comme le GPS se base sur des flottes de satellites, il y a forcément un peu de gravitation derrière... Toutefois, je ne présenterai dans cette section que l'essentiel dont nous aurons besoin pour comprendre la suite, le but de cette partie étant de déterminer la vitesse angulaire moyenne ω d'un satellite. Pour cela, nous allons employer la loi sur la gravitation universelle élaborée par Newton, ainsi que la théorie des mouvements circulaires uniformes. Ici, nous allons utiliser le concept des forces : F_c , la force centripète égale la force gravitationnelle F_G . La force centripète apparaît dès qu'il y a un mouvement circulaire uniforme. Elle se dirige vers le centre du mouvement et vaut F_G , car elle est l'unique force s'exerçant sur le satellite.

$$F_G = \frac{m_s M_t}{R^2} \cdot G \qquad F_c = \frac{m_s v^2}{R}$$

Le problème est que sommes en présence d'une orbite elliptique et cette théorie ne s'applique qu'aux mouvements circulaires. Nous allons donc ramener ce problème à une trajectoire circulaire ayant le même temps T pour effectuer une rotation. Cette orbite fictive est de rayon R . De plus, nous cherchons la vitesse angulaire moyenne, il nous faut donc remplacer v par $\frac{2\pi R}{T}$. En appliquant l'égalité des forces vue précédemment, on trouve :

$$\frac{m_s M_t}{R^2} \cdot G = \frac{m_s 4\pi^2 R^2}{T^2 R}$$
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{R^3}{M_t G}}$$

Comme on cherche la vitesse angulaire du système, il nous reste à appliquer $\omega = \frac{2\pi}{T}$ (calculs en radians) :

$$\omega = \sqrt{\frac{M_t G}{R^3}}$$

Cette équation est aussi valable dans le cas d'une ellipse où $R = a$, a étant le semi-grand axe de l'ellipse, car pour $t = \frac{T}{2}$, les points coïncident.

$$\omega = \sqrt{\frac{M_t G}{a^3}}$$

4.1.2 Les lois de Kepler

Johannes Kepler (1571-1630) a écrit trois lois fondamentales en astronomie :

- 1^{ère} Les planètes décrivent des orbites elliptiques dont le soleil est un foyer.
- 2^{ème} Le mouvement de chaque planète est tel que le segment de droite reliant le Soleil et la planète balaie des aires égales pendant des durées égales.
- 3^{ème} Pour toutes les planètes, le rapport entre le cube du demi grand axe de la trajectoire et le carré de la période est le même — cette constante est indépendante de la masse de la planète.

Dans le cas du GPS, seules les deux premières lois ont leur importance. Par ailleurs, la deuxième loi va être beaucoup sollicitée dans les calculs suivants.

4.2 Les ellipses

Les ellipses représentent, physiquement, la trajectoire d'un corps en orbite. Une ellipse est composée de deux foyers, que nous appellerons F et F' , d'un semi-grand axe a et de son axe perpendiculaire, b . Le centre de l'ellipse O correspond au milieu des deux foyers et c correspond à la distance $|OF|$.

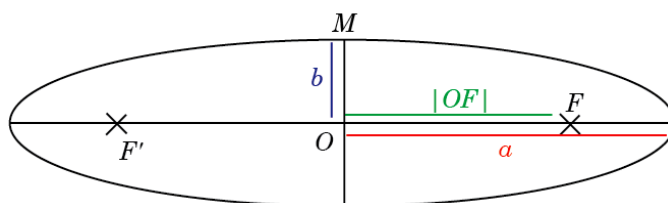


FIGURE 4.1 – Ellipse.

L'excentricité ϵ d'une ellipse est définie par le rapport suivant :

$$\epsilon = \frac{|OF|}{a}$$

L'excentricité est comprise entre 0 et 1. Une ellipse d'excentricité 0 est un cercle.

Dans le concept physique d'ellipse, deux notions sont à définir : l'anomalie moyenne et l'anomalie excentrique.

L'aire d'une ellipse vaut $\mathcal{A} = ab\pi$.

Une ellipse est aussi le lieu formé par l'ensemble des points dont la somme des distances aux foyers vaut $2a$. On peut donc déterminer la longueur du segment $|FM|$: $|FM| = a$. On sait que $|OF| = \epsilon a$.

On peut donc déterminer b grâce au théorème de Pythagore :

$$|FM|^2 - |OF|^2 = b^2 = a^2 - a^2\epsilon^2 = a^2(1 - \epsilon^2)$$

$$\boxed{b = a\sqrt{1 - \epsilon^2}}$$

On peut aussi déterminer le rapport $\frac{b}{a}$:

$$\frac{b}{a} = \frac{a\sqrt{1 - \epsilon^2}}{a} = \sqrt{1 - \epsilon^2}$$

4.2.1 Anomalie moyenne θ_M

Pour définir l'anomalie moyenne, il faut s'imaginer un satellite fictif s' (cf. figure 4.2) ayant une orbite circulaire, la même vitesse angulaire moyenne ω sur une rotation de révolution que le satellite s , dont on cherche l'anomalie θ_M , et centré au foyer F . L'anomalie moyenne est l'angle entre le satellite fictif, le foyer et le semi-grand axe de l'ellipse OF .

L'anomalie moyenne varie linéairement avec le temps, car il s'agit d'une orbite circulaire. Cela veut dire que si l'on connaît l'anomalie θ_{M0} du satellite à un certain temps t_0 de référence, il est possible de connaître θ_M en fonction du temps. C'est effectivement comme cela que procède le satellite :

$$\theta_M(t) \equiv \theta_{M0} + \omega(t - t_0) \pmod{2\pi}$$

L'anomalie moyenne est tout simplement un rapport qui se transforme en angle. Il peut très bien être couplé avec la deuxième loi de Kepler en formant un rapport entre l'aire parcourue et l'aire totale de l'ellipse. Il faut cependant multiplier ce rapport par 2π pour obtenir des angles en radians. C'est ce rapport que nous utiliserons pour effectuer le passage de l'anomalie excentrique à l'anomalie moyenne.

4.2.2 Anomalie excentrique θ_E

L'anomalie excentrique θ_E est l'angle entre les segments OF (cf. figure 4.2) et Os'' . On obtient le point s'' en effectuant la projection de s par la perpendiculaire à l'axe OF sur un cercle imaginaire de centre O et de rayon a .

L'anomalie excentrique ne sert à rien en elle-même, mais elle permet de trouver une relation avec θ_v , l'angle qui nous intéresse.

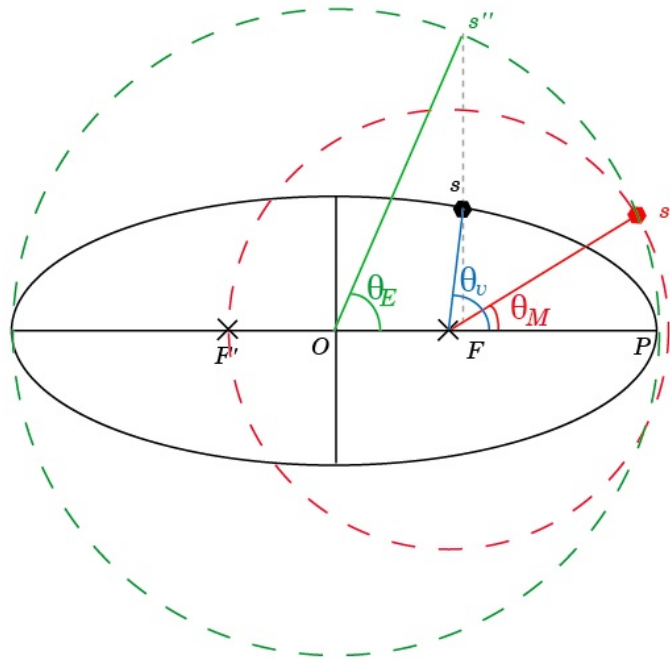


FIGURE 4.2 – Ellipse, anomalie excentrique et moyenne.

4.3 Relations entre l'anomalie moyenne et θ_v

Comme nous l'avons vu précédemment, il nous faut déterminer θ_v pour pouvoir prétendre trouver la position du satellite dans le repère ECEF. Malheureusement, le satellite envoie seulement son anomalie moyenne, qui est elle-même calculée à partir du semi-grand axe et de la période de rotation.

4.3.1 De l'anomalie moyenne à l'anomalie excentrique

Comme expliqué précédemment, je vais employer le rapport entre l'aire parcourue et l'aire totale de l'ellipse trajectoire pour trouver θ_M .

Selon la figure 4.3, nous cherchons l'aire de la portion d'ellipse FsP , que j'abrègerai $\mathcal{A}_{FsP}$.

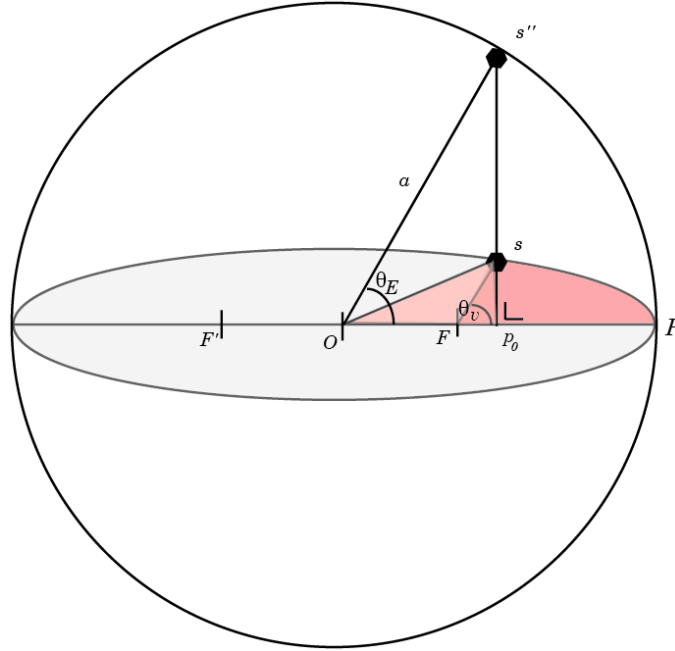


FIGURE 4.3 – Ellipse et anomalie excentrique.

$$\mathcal{A}_{FsP} = \mathcal{A}_{OsP} - \mathcal{A}_{OFs}$$

On commence par calculer l'aire du fragment d'ellipse $\mathcal{A}_{OsP}$. Pour ce faire, nous allons employer la relation entre l'aire $\mathcal{A}_{Os''P}$ du secteur $Os''P$ et $\mathcal{A}_{OsP}$ qui est un facteur $\frac{b}{a}$. Ce facteur $\frac{b}{a}$ vient du rapport entre l'aire totale d'une ellipse πab et l'aire du disque circonscrit πa^2 :

$$\frac{\pi ab}{\pi a^2} = \frac{b}{a}$$

$$\mathcal{A}_{Os''P} = \frac{\theta_E}{2\pi} \pi a^2$$

$$\mathcal{A}_{OsP} = \frac{b}{a} \cdot \frac{\theta_E}{2\pi} \pi a^2$$

$$\mathcal{A}_{OsP} = \frac{1}{2} ab \theta_E$$

Maintenant, il faut calculer $\mathcal{A}_{OFs}$. Nous allons employer la même relation que précédemment, tout en employant la formule de l'aire des triangles. Nous allons donc commencer par calculer $\mathcal{A}_{OFs''}$.

$$\mathcal{A}_{OFs''} = \frac{1}{2} a |OF| \sin \theta_E$$

La longueur du segment OF , $|OF|$, peut se calculer en fonction de l'excentricité ϵ et de a :

$$|OF| = a\epsilon$$

$$\mathcal{A}_{OFs''} = \frac{1}{2} a^2 \epsilon \sin \theta_E$$

$$\mathcal{A}_{OFs} = \frac{b}{a} \cdot \mathcal{A}_{OFs''}$$

$$\mathcal{A}_{OFs} = \frac{1}{2} ab \epsilon \sin \theta_E$$

Finalement, nous trouvons :

$$\mathcal{A}_{FsP} = \frac{1}{2} ab \theta_E - \frac{1}{2} ab \epsilon \sin \theta_E$$

$$\mathcal{A}_{FsP} = \frac{1}{2} ab (\theta_E - \epsilon \sin \theta_E)$$

$$\frac{2\mathcal{A}_{FsP}}{ab} = (\theta_E - \epsilon \sin \theta_E)$$

En amplifiant cette fraction par π , on retrouve l'aire de l'ellipse, $\mathcal{A}$, qui vaut πab :

$$2\pi \frac{\mathcal{A}_{FsP}}{\pi ab} = (\theta_E - \epsilon \sin \theta_E)$$

$$2\pi \frac{\mathcal{A}_{FsP}}{\mathcal{A}} = (\theta_E - \epsilon \sin \theta_E)$$

Comme nous l'avons vu précédemment, ce rapport est équivalent à l'anomalie moyenne θ_M en vertu de la deuxième loi de Kepler. Le terme multiplicatif 2π permet de passer du simple rapport à un angle en radians :

$$\theta_M = 2\pi \frac{\text{aire parcourue}}{\text{aire totale}}$$

$$\boxed{\theta_M = \theta_E - \epsilon \sin \theta_E}$$

4.3.2 De l'anomalie excentrique à θ_v

Maintenant qu'une relation entre θ_M et θ_E a été établie, on peut enfin déterminer θ_v , l'angle (cf. figure 4.2) qui nous permettra de nous repérer sur le plan orbital. La nomenclature que je vais employer ici est tirée de la figure 4.3. Nous allons calculer la longueur du segment p_0s , $|p_0s|$.

$$|p_0s| = \sqrt{1 - \epsilon^2} |p_0s''|$$

$$|p_0s| = a \sin \theta_E \sqrt{1 - \epsilon^2}$$

Dans cette dernière ligne, le rapport $\sqrt{1 - \epsilon^2}$ correspond au rapport $\frac{b}{a}$ en fonction de l'excentricité ϵ et de a . Ce rapport reste constant tout au long de l'ellipse. Maintenant, il faut calculer $|Fp_0|$:

$$|Fp_0| = |Op_0| - |OF|$$

$$|Fp_0| = a \cos \theta_E - a\epsilon$$

Finalement, nous avons un triangle rectangle dont nous connaissons les deux cathètes. Par trigonométrie, nous pouvons calculer θ_v :

$$\theta_v = \text{atan}\left(\frac{|p_0s|}{|Fp_0|}\right) = \text{atan}\left(\frac{a \sin \theta_E \sqrt{1 - \epsilon^2}}{a \cos \theta_E - a\epsilon}\right)$$

$$\boxed{\theta_v = \text{atan}\left(\frac{\sin \theta_E \cdot \sqrt{1 - \epsilon^2}}{\cos \theta_E - \epsilon}\right)}$$

L'angle θ_v peut être observé depuis la Terre et peut permettre la vérification des trajectoires des satellites, mais nous n'en avons pas besoin pour déterminer la position. Comme nous l'avons vu dans le chapitre 3, les axes du système de coordonnées orbital sont alignés avec le semi-petit axe de l'ellipse et avec le

semi-grand axe de l'ellipse. On peut donc utiliser l'équation paramétrique de l'ellipse pour déterminer la position du satellite en ajoutant le terme $-|OF|$, car le système d'axe est centré à l'un des foyers.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cos \theta_E - |OF| \\ b \sin \theta_E \end{pmatrix}$$

En remplaçant, comme précédemment, b par $a\sqrt{1-\epsilon^2}$ et $|OF|$ par $\epsilon \cdot a$, on trouve :

$$\boxed{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} \cos \theta_E - \epsilon \\ \sqrt{1-\epsilon^2} \sin \theta_E \end{pmatrix}}$$

4.4 Changements de bases

Maintenant que nous avons les coordonnées dans le repère orbital, il faut les convertir dans le repère ECEF. Pour cela, nous allons employer des matrices de rotation.

4.4.1 Les matrices de rotation

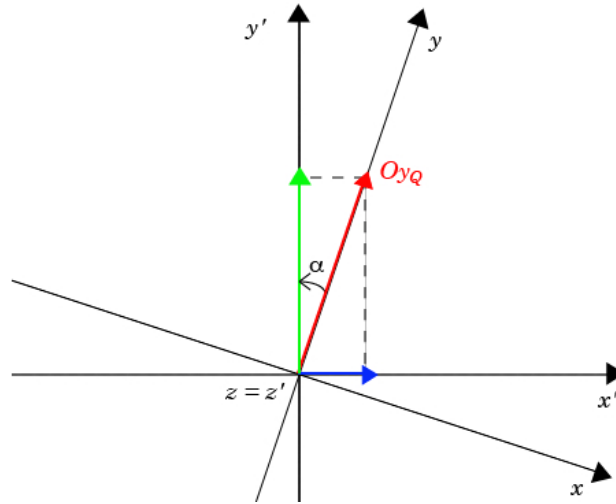


FIGURE 4.4 – Rotation d'angle α autour de l'axe z .

Une matrice de rotation est une fonction qui, appliquée à un vecteur, donne les coordonnées du vecteur dans un autre système de coordonnées. Pour mieux comprendre cela, il faut plus se plonger sur la notion de coordonnées.

Soit $Q(x_Q; y_Q; z_Q)$, un point dans l'espace. Ce point est relié par l'origine par le vecteur $\vec{OQ}$, qui est égal à la somme des vecteurs $\vec{Ox_Q}$, $\vec{Oy_Q}$, $\vec{Oz_Q}$:

$$\begin{aligned} \vec{OQ} &= \begin{pmatrix} x_Q \\ y_Q \\ z_Q \end{pmatrix} \quad \vec{Ox_Q} = \begin{pmatrix} x_Q \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{Oy_Q} = \begin{pmatrix} 0 \\ y_Q \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{Oz_Q} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z_Q \end{pmatrix} \\ \vec{OQ} &= \vec{Ox_Q} + \vec{Oy_Q} + \vec{Oz_Q} \\ \vec{OQ} &= \begin{pmatrix} x_Q \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ y_Q \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z_Q \end{pmatrix} = x_Q \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y_Q \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z_Q \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Maintenant, il faut déterminer la transformation que subissent les vecteurs $\vec{Ox_Q}$, $\vec{Oy_Q}$, $\vec{Oz_Q}$ avec une rotation de α autour de l'axe z , soit le cas illustré par la figure 4.4. Comme l'axe z est l'axe de rotation,

rien ne bouge pour le vecteur $\overrightarrow{Oz_Q}$:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z_Q \end{pmatrix} \xrightarrow{R_z(\alpha)} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z_Q \end{pmatrix}$$

En revanche, les vecteurs $\overrightarrow{Ox_Q}$ et $\overrightarrow{Oy_Q}$ se sont touchés par la transformation. En projetant ces vecteurs sur le nouvel axe, on trouve par trigonométrie :

$$\begin{pmatrix} x_Q \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_z(\alpha)} \begin{pmatrix} x_Q \cos \alpha \\ -x_Q \sin \alpha \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 0 \\ y_Q \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_z(\alpha)} \begin{pmatrix} y_Q \sin \alpha \\ y_Q \cos \alpha \\ 0 \end{pmatrix}$$

Au final,

$$\begin{pmatrix} x_Q \\ y_Q \\ z_Q \end{pmatrix} \xrightarrow{R_z(\alpha)} \begin{pmatrix} x_Q \cos \alpha + y_Q \sin \alpha \\ y_Q \cos \alpha - x_Q \sin \alpha \\ z_Q \end{pmatrix}$$

La fonction $R_z(\alpha)$ peut être mise sous une forme matricielle, où $R_z(\alpha)$ transformera notre vecteur $\overrightarrow{OQ}$ en un vecteur $\overrightarrow{OQ'}$.

$$R_z(\alpha) \cdot \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OQ'}$$

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_Q \\ y_Q \\ z_Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_Q \cos \alpha - y_Q \sin \alpha \\ y_Q \cos \alpha + x_Q \sin \alpha \\ z_Q \end{pmatrix}$$

Sur $\overrightarrow{OQ'}$, il y a un T . Cela signifie que la matrice est transposée. J'ai effectué cette transposition afin de rendre le vecteur plus lisible. Maintenant, on peut aussi déterminer les autres transformations, $R_x(\alpha)$ et $R_y(\alpha)$. On peut remarquer que les colonnes de $R_z(\alpha)$ restent les mêmes, mais se décalent d'une colonne.

$$R_x(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \text{ et } R_y(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & 0 & \sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

Il est à noter que pour que ces transformations fonctionnent, l'angle doit être pris dans le sens anti-horaire, qui est par ailleurs le sens trigonométrique, comme c'est le cas sur la figure 4.4. Sinon, l'angle peut être négatif.

4.4.2 Du système de coordonnées orbital au système ECEF

Pour passer du repère orbital au repère ECEF, il n'y a que des rotations à effectuer, car les deux repères ont leur origine au centre de la Terre. Afin d'être plus clair, je vais présenter chaque étapes des transformations à effectuer. Dans ces calculs, $\vec{p}_s$ est le vecteur position du satellite s dans le repère orbital (x_s, y_s, z_s) . Nous allons nous baser sur la figure 4.5 pour la nomenclature.

Du plan orbital au plan éclipique

Le satellite s appartient au plan orbital. Il n'a donc pas de coordonnée pour l'axe z_s . Ses coordonnées sont :

$$\vec{p}_s := \begin{pmatrix} a \cos \theta_v \\ a \sqrt{1 - \epsilon^2} \sin \theta_v \\ 0 \end{pmatrix}$$

Comme nous le voyons sur la figure 4.5, il faut effectuer une rotation autour de l'axe z_s de $-\theta_\Omega$. Les coordonnées de s dans le repère éclipique (x_e, y_e, z_e) sont donc le résultat du produit de $\vec{p}_s$ et $R_z(-\theta_\Omega)$

$$R_z(-\theta_\Omega) \cdot \vec{p}_s = \vec{p}_s'$$

Avec cette transformation, l'axe x_s se trouve confondu avec l'axe x_e . Toutefois, le plan $x_s y_s$ est incliné de i par rapport au plan $x_e y_e$. Il faut donc effectuer une rotation autour de x_s de $-i$.

$$R_x(-i) \cdot \vec{p}_s' = \vec{p}_{se}$$

Le vecteur $\vec{p}_{se}$ correspond au vecteur position du satellite dans le repère éclipique.

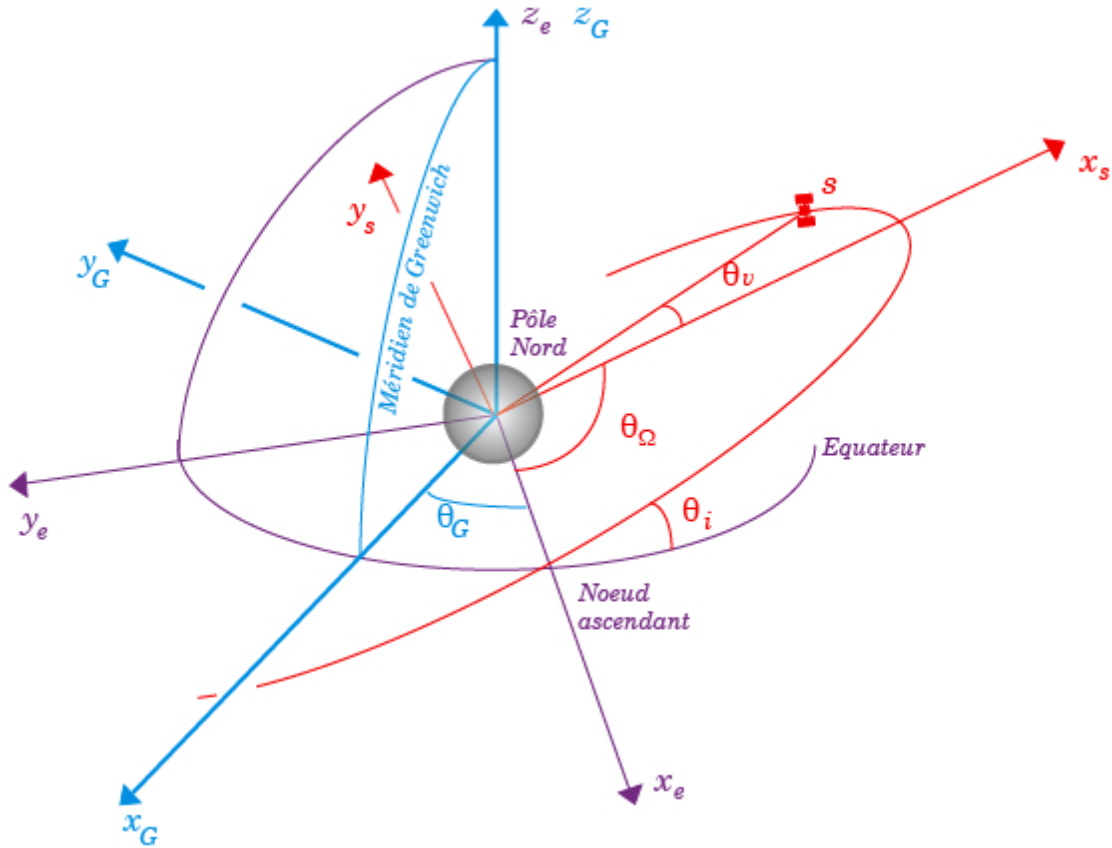


FIGURE 4.5 – Différents systèmes de coordonnées.

Du repère écliptique au repère ECEF

Pour le moment, toutes les transformations que nous avons effectuée se passaient sur des repères fixes, indépendant de la rotation de la Terre. Maintenant, nous allons calculer les coordonnées de $\vec{p}_{se}$ dans le repère ECEF, qui dépend du temps. En effet, le méridien de Greenwich se déplace avec la vitesse angulaire de la Terre ω_T qui vaut environ 15° par heure. Le satellite connaît l'angle θ_{G0} entre son nœud ascendant, le centre de la Terre et le méridien de Greenwich, lorsque le temps t vaut 0. Il peut donc déduire θ_G en fonction du temps t et à partir de θ_{G0} .

$$\theta_G = \theta_{G0} - t \cdot \omega_T$$

Pour trouver les coordonnées du vecteur-position $\vec{p}_{se}$ du satellite dans le repère de Greenwich, il faut lui imposer une rotation de θ_G :

$$\vec{p}_{sG} = R_z(\theta_{G0} - t \cdot \omega_T)$$

Finalement, la transformation qui donne la position du satellite dans le repère ECEF à partir de θ_v et des paramètres de l'orbite (excentricité e , semi-grand axe a , angle au nœud ascendant θ_{G0} , inclinaison du plan orbital θ_i) est la suivante :

$$R_z(-\theta_\Omega) \cdot R_x(-i) \cdot R_z(\theta_{G0} - t \cdot \omega_T) \cdot \begin{pmatrix} a \cos \theta_v \\ a \sqrt{1 - e^2} \sin \theta_v \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_G \\ y_G \\ z_G \end{pmatrix}$$

Le point de coordonnée $(x_G; y_G; z_G)$ est la position du satellite dans le repère ECEF. C'est à partir de ces coordonnées que les récepteurs GPS calculent la position du récepteur.

Chapitre 5

Calcul de la position

Nous avons vu dans le chapitre précédent comment on détermine la position d'un satellite dans l'espace, en fonction de ses données orbitales. Ces calculs sont nécessaires, mais ne nous donnent aucune idée quant à la position d'un récepteur GPS. Maintenant, nous allons nous plonger de façon plus approfondie dans le système GPS, c'est-à-dire la détermination de sa position à partir des signaux envoyés par les satellites.

En effet, les satellites envoient des signaux de l'espace qui sont captés par le récepteur. Ce dernier peut déterminer, à partir du signal, le temps qu'il a mis pour arriver et en connaissant la vitesse de propagation de l'onde dans le milieu, on peut calculer la distance entre le satellite et le récepteur.

5.1 Présentation du problème

Dans le calcul de la position avec un GPS, nous avons une seule inconnue, la position du récepteur, qui est un vecteur position dans le repère ECEF. Du côté des données connues, nous avons la position des satellites $\vec{s}_p$ dans le même repère, qui est déterminée à partir d'almanachs, et la distance séparant le récepteur du satellite. Cela revient à dire que, dans un cas idéal, sans erreur, le récepteur se situe à l'intersection de n sphères, où n est le nombre de satellites. Comme il y a toujours une petite erreur dans la mesure des distances due à la non synchronisation des horloges, nous allons rajouter un terme de correction, b . La distance séparant le k -ième satellite du récepteur se nomme ρ_k .

Premièrement, il faut définir un vecteur position du récepteur $\vec{r}_p$ qui vaut initialement $\vec{r}_{p0} (0, 0, 0)^T$, où T signifie transposé.

La distance ρ_k est traduite par le concept mathématique de norme. Elle vaut :

$$\rho_k = \|\vec{s}_p - \vec{r}_p\| + b$$

Toutefois, ρ_k est donné par les mesures. Dans le processus itératif, nous emploierons ρ_0 avec un $\vec{r}_{p0}$:

$$\rho_0 = \|\vec{s}_p - \vec{r}_{p0}\| \quad \text{où} \quad \vec{r}_{p0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Maintenant, comme nous allons procéder par itération, nous allons rajouter à chaque itération un $\vec{\delta r}_p$ et une différence de ρ_k , $\delta\rho_k$.

$$\begin{aligned} \delta\rho_k &= \rho_k - \rho_0 \\ \delta\rho_k &= \|\vec{s}_p - \vec{r}_{p0} - \vec{\delta r}_p\| - \|\vec{s}_p - \vec{r}_{p0}\| + \delta b \end{aligned} \quad (5.1)$$

Avant de finir le calcul, il faut présenter quelques outils dont nous aurons besoin pour continuer.

5.2 La méthode de Newton-Raphson et les polynômes de Taylor

Les polynômes de Taylor (1685-1731) sont des polynômes qui peuvent approximer une fonction aux environs d'une valeur de départ, x_0 . Ils se basent sur le concept des dérivées. Ainsi, la forme générale du

polynôme de Taylor est :

$$f(x) \simeq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

Un polynôme de Taylor de degré deux est, par conséquent, la droite tangente à $f(x)$ passant par x_0 . La méthode de Newton-Raphson est un algorithme itératif permettant de trouver les zéros d'une fonction. Cette méthode se base justement sur une approximation de la fonction dont on cherche les zéros. En fait, la méthode de Newton emploie un polynôme de Taylor du premier degré, c'est à dire la tangente au point x_0 . Cette méthode cherche le zéro de la tangente, x_1 , puis détermine la tangente de $f(x)$ en x_1 , trouve le zéro de cette tangente, x_2 ...Voici deux figures qui vont illustrer la méthode de Newton avec l'équation $f(x) = 0,01x^4 - 0,5x^3 + x$ en partant de l'approximation de départ $x_0 = -2$.

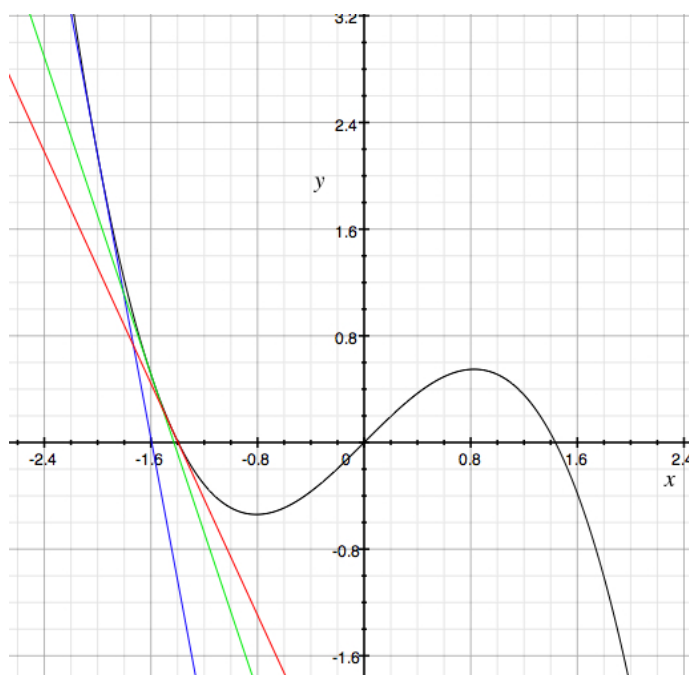


FIGURE 5.1 – $f(x)$ et trois tangentes



FIGURE 5.2 – Méthode de Newton sur $f(x)$

La méthode de Newton se présente sous la forme d'une approximation de départ x_0 et d'un terme correctif qui se rajoute, Δx . Prenons en détail, une itération. On part de x_0 . Appliqué à $f(x)$, on trouve $f(x_0)$. La pente de $f(x)$ est la dérivée, $f'(x)$. Par conséquent, la pente en x_0 vaut $f'(x_0)$. On cherche le Δx , qui est la distance entre x_0 et x_1 , le zéro de la tangente de $f(x)$ en $f(x_0)$. Par proportionnalité, $\Delta x \cdot f'(x) = f(x)$. On trouve donc que $\Delta x = \frac{f(x)}{f'(x)}$. Cela s'appelle le terme correctif. Il est à soustraire à l'approximation de départ :

$$x_0 - \Delta x = x_1$$

$$x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = x_1$$

On peut donc passer à une forme plus générale, en enlevant les fractions :

$$f'(x_n) \cdot (x_{n+1} - x_n) = -f(x_n)$$

On peut appliquer les séries de Taylor à l'équation 5.1 :

$$\delta\rho \simeq \delta\rho_k(\vec{rp_0}) + \delta\rho'(\vec{rp})(\vec{rp} - \vec{rp_0})$$

$$\delta\rho_k(\vec{rp_0}) = \|\vec{sp_k} - \vec{rp_0} - \vec{\delta rp}\| - \|\vec{sp_k} - \vec{rp_0}\|, \text{ et } \vec{rp_0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

En remplaçant $\vec{rp_0}$ par sa valeur, on simplifie presque tout :

$$\delta\rho_k(\vec{rp_0}) = \|\vec{sp_k}\| - \|\vec{sp_k}\| = 0$$

Il faut ensuite calculer $\delta\rho'(\vec{rp})(\vec{rp} - \vec{rp_0})$. On peut commencer par changer $\vec{rp} - \vec{rp_0}$ par $\vec{\delta rp}$, par définition. Il faut quand même calculer la dérivée de $\delta\rho(\vec{rp})$:

$$\frac{\partial}{\partial \vec{rp_0}} \delta\rho_k(\vec{rp_0}) = -\frac{\vec{sp_k} - \vec{rp_0}}{\|\vec{sp_k} - \vec{rp_0}\|}$$

Tous les éléments sont prêts pour mettre en forme notre approximation de Taylor :

$$\delta\rho_k = -\frac{\vec{sp_k} - \vec{rp_0}}{\|\vec{sp_k} - \vec{rp_0}\|} \cdot \vec{\delta rp} + \delta b$$

Le premier terme de l'équation précédente est un vecteur unitaire qui désigne l'axe entre le récepteur et le satellite k . Nous allons noter ce vecteur $\vec{1_k}$. Ce vecteur nous sera utile pour calculer la dilution de précision (DOP), que nous verrons plus loin.

$$\delta\rho_k = -\vec{1} \cdot \vec{\delta rp} + \delta b$$

Nous pouvons par conséquent déterminer $\vec{1}$:

$$\vec{1_k} = \frac{1}{\|\vec{sp_k} - \vec{rp_0}\|} \begin{pmatrix} spx_k - rpx \\ spy_k - rpy \\ spz_k - rpz \end{pmatrix}$$

où rpx, y, z et spx, y, z sont les coordonnées des vecteurs selon les axes x,y et z du système de coordonnées ECEF.

Maintenant, il faut écrire ces équations sous forme de système à n équations. k est un indice quelconque de satellite (1,2,3... n) et n est le nombre de satellites. Nous allons donc créer un produit matriciel où la première matrice est une matrice $n \times 4$ où, dans chaque lignes, le vecteur $\vec{1}$ apparaîtra sous sa forme transposée et un 1 qui permet d'ajouter le terme b dans le système. L'autre matrice 4×1 , contient $\vec{\delta rp}$ et δb .

$$\begin{pmatrix} \delta\rho_1 \\ \delta\rho_2 \\ \delta\rho_3 \\ \vdots \\ \delta\rho_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\vec{1_1^T} & 1 \\ -\vec{1_2^T} & 1 \\ -\vec{1_3^T} & 1 \\ \vdots & \\ -\vec{1_n^T} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{\delta rp} \\ \delta b \end{pmatrix}$$

La matrice qui contient les $\vec{1}$ s'appelle la matrice géométrie. Pour simplifier la notation, nous la nommerons désormais $\mathbf{G}$. La matrice contenant les $\delta\rho$ s'appellera désormais $\delta\boldsymbol{\rho}$.

$$\delta\boldsymbol{\rho} = \mathbf{G} \begin{pmatrix} \vec{\delta rp} \\ \delta b \end{pmatrix}$$

L'inconnue est donc la matrice contenant $\vec{\delta rp}$ et δb . Pour trouver cette inconnue, il faut multiplier l'inverse de $\mathbf{G}$ par $\delta\boldsymbol{\rho}$. Malheureusement, si n est supérieur à 4, la matrice n'est plus carrée, donc difficilement inversible. Nous sommes donc condamnés à appliquer une méthode de pseudo-inversion d'une matrice non-carrée.

5.2.1 Méthode de Moore-Penrose

La méthode de Moore-Penrose permet de calculer le pseudo-inverse d'une matrice non carrée. Soit une matrice A de dimension $n \times m$, A , où $n \neq m$. Le pseudo-inverse de cette matrice, $A^\dagger$, selon la méthode de Moore-Penrose, vaut :

$$(A^T A)^{-1} A^T = A^\dagger$$

En appliquant cette méthode à notre calcul, on trouve :

$$\mathbf{G}^\dagger \cdot \delta \boldsymbol{\rho} = \begin{pmatrix} \overrightarrow{\delta r p} \\ \delta b \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{G}^\dagger \cdot \delta \boldsymbol{\rho} + \begin{pmatrix} \overrightarrow{r p_0} \\ b_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overrightarrow{r p_1} \\ b_1 \end{pmatrix}$$

Il nous reste désormais plus qu'à effectuer un nombre d'itérations suffisant pour avoir une précision suffisante pour $\overrightarrow{r p}$.

Aujourd'hui, grâce à l'informatique et à la programmation, il est aisé de faire calculer à l'ordinateur un nombre élevé d'itérations. C'est ce que nous verrons dans le chapitre suivant avec un programme Matlab employant la même technique.

5.3 Dilution Of Precision (DOP)

A partir de la matrice géométrie, $\mathbf{G}$, il est possible de calculer la dilution de précision induite par la géométrie des satellites par rapport au récepteur. Par exemple, si quatre satellites sont groupés dans un petit coin de ciel, la dilution de précision est plus grande que si les satellites étaient homogènement répartis.

Dans cette section, je serai plus descriptif, car les calculs des DOP font appel à des connaissances mathématiques que je ne pourrais pas expliquer précisément.

Soit la matrice $\mathbf{H}$, une matrice 4×4 .

$$\mathbf{H} = (\mathbf{G}^T \mathbf{G})^{-1}$$

La dilution de précision DOP se base sur le concept mathématique de covariance. De manière très succincte, la covariance est une mesure de la dépendance entre deux variables. Dans notre cas, la covariance analyse la dépendance des vecteurs $\overrightarrow{I_k}$ entre eux, c'est à dire que, si les vecteurs sont très dépendants l'un de l'autre (cas où tous les satellites seraient entassés dans un petit coin de ciel), la covariance sera élevée. En revanche, dans le cas d'une bonne répartition géométrique, la variance sera faible. Les différents DOP sont basés sur certains éléments de la matrice $\mathbf{H}$. Pour cette raison, nous allons nommer l'élément de la n ième colonne et de la m ième ligne de la matrice $\mathbf{H}$, $H_{n,m}$.

Le DOP est un chiffre généralement compris actuellement entre 1 et 4 et entre 1 et 5 il y a quelques années, quand la constellation ne contenait que 24 satellites opérationnels contre 31 aujourd'hui. Comme nous l'avons vu précédemment, plus le DOP est bas, meilleure est la précision. On distingue plusieurs sortes de DOPs :

- **TDOP** Time Dilution Of Precision (dilution temporelle de la précision) :

$$TDOP = \sqrt{H_{4,4}}$$

- **PDOP** Position Dilution Of Precision (dilution de la précision sur la position) :

$$PDOP = \sqrt{H_{1,1} + H_{2,2} + H_{3,3}}$$

- **GDOP** Geometric Dilution Of Precision (dilution géométrique de la précision) :

$$GDOP = \sqrt{H_{1,1} + H_{2,2} + H_{3,3} + H_{4,4}}$$

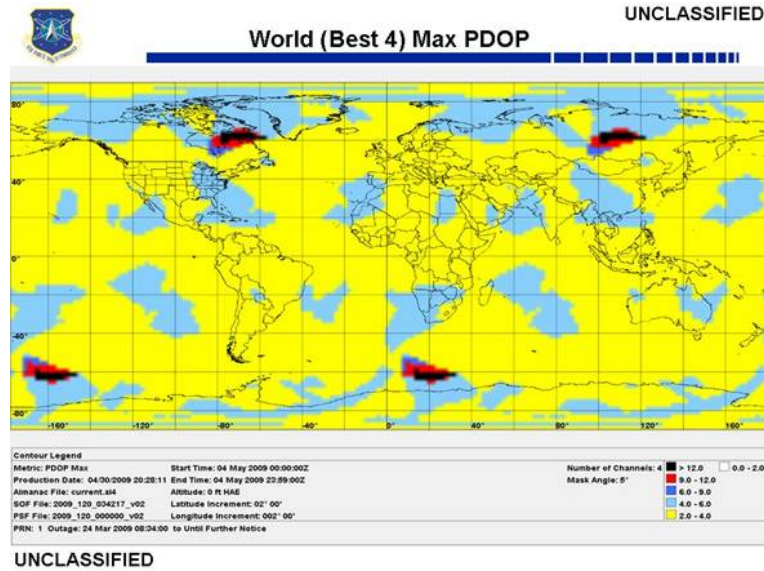


FIGURE 5.3 – Distribution du PDOP le 04.05.2009

Ce sont les principaux DOPs. Il en existe d'autres qui dénotent la dilution de la précision (Horizontal-DOP et Vertical-DOP) sur un système de coordonnées local (Est-Nord-verticalité) dont je ne parlerai pas dans ce travail.

Sur la figure 5.3, la répartition du HDOP sur la Terre est représentée. On remarque une périodicité des taches où le HDOP est plus élevé. Cela est dû à la structure du segment spatial.

5.4 De la position ECEF à la position WGS84

Maintenant que nous avons vu le calcul pour déterminer la position du récepteur dans le repère ECEF, il ne reste "plus qu'à" transformer ces coordonnées en d'autres, plus maniables et que nous employons tous les jours : la latitude ϕ , longitude λ et altitude A (LLA). Pour ce faire, nous allons nous baser à nouveau sur les ellipses et leur équation paramétrique.

On connaît le vecteur $\vec{r}_p$ dont les coordonnées sont x , y et z . Voici les données de l'ellipsoïde WGS 84 :

$$a = 6'378'137 \text{ [m]} \quad b = 6'356'752 \text{ [m]}$$

Nous allons commencer par calculer la longitude, dont le calcul est assez évident :

$$\lambda = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

Il faut ensuite calculer la latitude, car l'altitude en dépend. Pour ce faire, nous allons regarder la Terre comme une ellipse, en coupe, comme sur la figure 5.4. Soit le vecteur position du récepteur $\vec{r}_p$ dans ce système d'axe, dont les composantes sont $(\sqrt{x^2 + y^2}, z)^T$. L'équation paramétrique de l'ellipse est :

$$\begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cos \theta_e \\ b \sin \theta_e \end{pmatrix}$$

θ_e est l'angle qui varie de 0 à 2π en dessinant un cercle écrasé par un facteur $\frac{b}{a}$, une ellipse, ainsi que nous l'avons vu lorsque nous avons parlé de l'anomalie excentrique. Si on regarde bien la figure 5.4 on remarque que le rapport $\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ est le même que $\tan \theta_e \cdot \frac{b}{a}$

On peut donc déterminer θ_e :

$$\theta_e = \arctan\left(\frac{a \cdot z}{b \cdot \sqrt{x^2 + y^2}}\right)$$

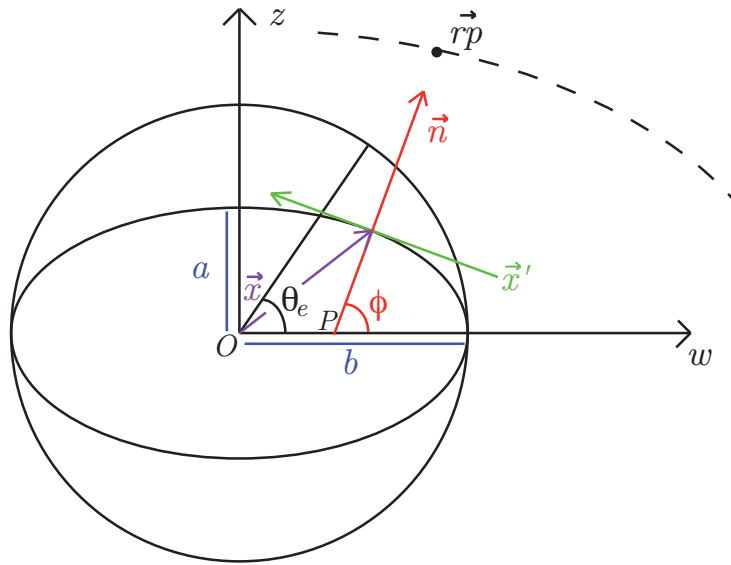


FIGURE 5.4 – La Terre vue de profil

Pour déterminer la latitude, il faut connaître la normale à l'ellipse passant par le point rp . Réécrivons l'équation paramétrique de l'ellipse :

$$\vec{x} : \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cos \theta_e \\ b \sin \theta_e \end{pmatrix}$$

En dérivant cette équation, on trouve le vecteur directeur de la tangente à l'ellipse en fonction de θ_e , qui est connu.

$$\vec{x}' : \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a \sin \theta_e \\ b \cos \theta_e \end{pmatrix}$$

La normale est perpendiculaire à la tangente, par définition. Comme nous connaissons la tangente, nous pouvons déterminer le vecteur directeur de la normale $\vec{n}$ à l'ellipse. En employant le théorème du cosinus vectoriel, on trouve :

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\begin{pmatrix} -a \sin \theta_e \\ b \cos \theta_e \end{pmatrix} \cdot \vec{n}}{\|\vec{x}'\| \|\vec{n}\|} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} -a \sin \theta_e \\ b \cos \theta_e \end{pmatrix} \cdot \vec{n} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} b \cos \theta_e \\ a \sin \theta_e \end{pmatrix}$$

La latitude étant l'angle entre $\vec{n}$ et l'axe $O\vec{x}, y$, on peut vite la déterminer à l'aide du théorème du cosinus vectoriel :

$$\cos \phi = \frac{\begin{pmatrix} b \cos \theta_e \\ a \sin \theta_e \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}{\|\vec{n}\|}$$

En développant, on trouve :

$$\phi = \arccos \left(\frac{b \cdot \cos \theta_e}{\sqrt{b^2 \cdot \cos^2 \theta_e + a^2 \cdot \sin^2 \theta_e}} \right)$$

Nous pouvons enfin passer au calcul de l'altitude. L'altitude, selon notre schéma correspond à la distance entre le point rp et le point d'intersection entre la normale et l'ellipse. Ce point d'intersection est le point de l'ellipse avec θ_e . L'altitude vaut donc :

$$A = \|\vec{r}_p - \vec{x}\| = \sqrt{(z - b \sin \theta_e)^2 + \left(\sqrt{x^2 + y^2} - a \cos \theta_e\right)^2}$$

Je tiens à préciser qu'il existe beaucoup d'autres formules de conversion, mais les formules que je présente ont le mérite de ne pas être itératives, donc de donner le résultat directement.

Chapitre 6

Programmation MATLAB

J'ai parlé précédemment de programmation, permettant de calculer rapidement un nombre élevé d'itérations. Dans ce chapitre, je présente un programme MATLAB qui permet de déterminer sa position à partir des mesures effectuées par le récepteur.

Le programme commence par la définition des variables principales (selon la nomenclature employée au chapitre précédent), à savoir, x , y , z et b . Le vecteur $r\vec{p}$ y est aussi défini à la cinquième ligne du code. La vingtaine de lignes suivante est la déclaration des données du récepteur GPS. Elles contiennent la position du k ème satellite selon x ($spxk$), y ($spyk$) et z ($spzk$). Afin de rendre le calcul plus lisible, des tableaux des mesures spx , spy et spz sont créés. Ils se présentent sous la même forme qu'une matrice ou un vecteur. Une matrice s'écrit entre crochet, où l'on entre le contenu, ligne par ligne, chaque éléments d'une même ligne sont séparés par une virgule ou un espace et chaque changement de ligne est marqué par un point virgule.

Une matrice sp contenant les positions du satellite (x , y et z) en colonne et $sp1$ jusqu'à spk en ligne est aussi créée.

Ensuite, le calcul est le même que celui présenté aux pages précédentes.

Je vais tout de même présenter les fonctions MATLAB employées :

- La fonction `while` (tant que) permet d'effectuer un processus de boucle tant que la condition (`while [condition]`) n'est pas remplie. Dans ce cas, tant que l'écart entre ρ et la norme $\|s\vec{p} - r\vec{p}\|$ est supérieur à f (10^{-7}), une itération de la méthode de Newton est effectuée. Cette fonction se termine par `end`.
- La boucle `for` (pour) permet d'effectuer des itérations basées sur un indice et, par conséquent, d'utiliser les tableaux qui ont été créés. On peut traduire le `for` dans notre cas, par pour k de 1 à `numsat` (nombre de satellites), effectuer les opérations jusqu'au `end`.
- L'instruction `pinv` implémente la méthode de pseudo-inversion selon la méthode de Moore-Penrose
- `inv` inverse une matrice
- Le nom d'une matrice suivi par un `'` signifie la transposée de cette matrice
- `A(n,m)` sélectionne l'élément de la matrice A à la n -ième ligne à la m -ième colonne

À la fin d'exécution des boucles, le programme met en évidence à la fenêtre d'affichage des résultats du logiciel Octave, utilisant MATLAB, les opérations non dotées d'un point-virgule en fin de ligne. Dans ce programme, `latitude_dd_mm_ss` et `longitude_dd_mm_ss` sont affichés en degrés minutes secondes (`dd_mm_ss`), ainsi que l'altitude du récepteur et le PDOP.

Ces mesures satellites m'ont été gracieusement envoyées par M. Marius Kleiner de l'EPFL, que je remercie infiniment. Il avait précisé que ces mesures pointaient sur le campus de l'EPFL. L'image ci-dessus représente le campus avec le point que j'ai trouvé en rouge. Il s'agit du bâtiment INR (informatique).



FIGURE 6.1 – Résultat du programme

Les données de M. Kleiner étaient les suivantes. Les coordonnées sont toutes selon le repère ECEF :

n° sat	coordonnée x [m]	coordonnée y [m]	coordonnée z [m]
1	1.37019537090789712965e+07	1.88932703595963269472e+07	1.32272614406451601535e+07
2	1.40207963065994493663e+07	-9.55129060306848585606e+06	1.98322463539260625839e+07
3	1.08641071895698793232e+07	1.92034617228168994188e+07	1.48128172545071411878e+07
4	1.26570717047301698476e+07	-1.76042314456168264151e+07	1.52305429724695011973e+07
5	2.33191650305386483669e+07	6.96287577336552646011e+06	1.09624313163641858846e+07

Et voici les distances récepteur-satellite en mètres :

n° satellite	ρ [m]
1	2.23534122244216091931e+07
2	2.06424218650466091931e+07
3	2.22735987869216091931e+07
4	2.25711034431716091931e+07
5	2.10068578962966091931e+07

A partir de ces résultats, mon programme présente les résultats sous cette forme :

```
octave-3.0.3:3> gps
PDOP: 4.569432
longitude_dd_mm_ss =
      6      33      45
latitude_dd_mm_ss =
      46      31      6
altitude [m]: 426.689392
octave-3.0.3:4> □
```

Les coordonnées indiquées par le résultat correspondent au point rouge de la figure 6.1. Cette figure est une copie d'écran de la carte nationale au 1 :25'000.

A la page suivante, les lignes de code de mon programme sont recopiées.

```

x=0;
y=0;
z=0;
b=0;
rp=[x; y ;z];

spx1=1.37019537090789712965e+07;
spy1=1.88932703595963269472e+07;
spz1=1.32272614406451601535e+07;
spx2=1.40207963065994493663e+07;
spy2=-9.55129060306848585606e+06;
spz2=1.98322463539260625839e+07;
spx3=1.08641071895698793232e+07;
spy3=1.92034617228168994188e+07;
spz3=1.48128172545071411878e+07;
spx4=1.26570717047301698476e+07;
spy4=-1.76042314456168264151e+07;
spz4=1.52305429724695011973e+07;
spx5=2.33191650305386483669e+07;
spy5=-9.96287577336552646011e+06;
spz5=1.09624313163641858846e+07;

spx=[spx1,spx2,spx3,spx4,spx5];
spy=[spy1,spy2,spy3,spy4,spy5];
spz=[spz1,spz2,spz3,spz4,spz5];

sp1=[spx1; spy1; spz1];
sp2=[spx2; spy2; spz2];
sp3=[spx3; spy3; spz3];
sp4=[spx4; spy4; spz4];
sp5=[spx5; spy5; spz5];

sp=[sp1,sp2,sp3,sp4,sp5];

rho=2.23534122244216091931e+07;
rho2=2.06424218650466091931e+07;
rho3=2.22735987869216091931e+07;
rho4=2.25711034431716091931e+07;
rho5=2.10068578962966091931e+07;

rho_c=[rho1; rho2; rho3; rho4; rho5];
UV=[0,0,0,0,0;0,0,0,0,0;0,0,0,0,0;0,0,0,0,0];
drho=[0;0;0;0;0];
numsat=5;
e = inf;
d = inf;
f = 1e-7;
while e > f
    for k = 1:numsat
        UV(k:k,:) = [(-1/norm(sp(:,k:k)-rp))*spx(:,k:k),(-1/norm(sp(:,k:k)-rp))*spy(:,k:k),(-1/norm(sp(:,k:k)-rp))*spz(:,k:k),1];
        drho(k:k,:)=rho_c(k)-norm(sp(:,k:k)-rp);
    end
    dub=pinv(UV)*drho;
    next=[rp;b]+dub;
    rp=[next(1,1);next(2,1);next(3,1)];
    b=next(4,1);
    e=d-norm(drho);
    d=norm(drho);
end
H=inv(UV'*UV);
PDOP=sqrt(H(1,1)+H(2,2)+H(3,3));

x =rp(1,1);
y =rp(2,1);
z =rp(3,1);

rpp=[sqrt(x^2+y^2);z];

a = 6378137;
b = 6356752;

th = atan2(a*z,b*sqrt(x^2+y^2));
lon = atan2(y,x);
latd = 180*acos(b*cos(th)/sqrt(b^2*(cos(th))^2+a^2*(sin(th))^2))/pi;
lat=acos(b*cos(th)/sqrt(b^2*(cos(th))^2+a^2*(sin(th))^2));

xpos=[a*cos(th);b*sin(th)];
altitude=norm(xpos-rpp);
latitude_degrees=fix(latd);
latitude_minutes=(latd-fix(latd))*60;
latitude_dd_mm_ss=[fix(latd) fix(latitude_minutes) fix(60*(latitude_minutes-fix(latitude_minutes)))];

longitude=lon*180/pi;
longitude_dd_mm_ss=[fix(longitude) fix(60*(longitude-fix(longitude))) fix(60*(60*(longitude-fix(longitude))-fix(60*(longitude-fix(longitude))))];

format short
printf('\n');
printf('PDOP: %f \n', PDOP);
format short

format rat
longitude_dd_mm_ss
latitude_dd_mm_ss
format short
printf('altitude [m]: %f \n', altitude);

```

Chapitre 7

Transmission et traitement du signal

Dans les chapitres précédents, j'ai exposé la façon de calculer la position en connaissant les positions des satellites et la distance les séparant du récepteur. Toutefois, la distance ρ_k résulte d'un traitement des signaux envoyés par les satellites et d'une prise en compte de plusieurs problèmes physiques qui seront traités au chapitre suivant.

Je vais tout d'abord présenter les différents signaux envoyés par les satellites, puis j'expliquerai comment en extraire la distance.

7.1 Composition des signaux GPS

Les satellites envoient des ondes radio UHF (Ultra High Frequency) à deux fréquences, L1 ($f_{L1}=1575,42$ MHz) et L2 ($f_{L2}=1227,60$ MHz). Une troisième fréquence, L5 ($f_{L5}=1176.45$ MHz) est en train d'être mise en place.

La fréquence L1 contient deux signaux, l'un disponible pour les civils et l'autre principalement pour les militaires.

L2 est formé d'un seul et unique signal qui est aussi principalement affecté aux militaires. En fait, les récepteurs GPS bon marché n'analysent que L1 et effectuent la mesure de code, alors que les GPS plus performants utilisés pour la géodésie, la surveillance et par l'armée effectuent la mesure de phase et analysent les deux fréquences, L1 et L2. On parle alors de récepteur bi-fréquence.

Afin de comprendre la forme du signal, il faut se tourner vers les équations du signal en fonction du temps.

$$s_{L1}(t) = \sqrt{2P_C}D(t)x(t) \cos(2\pi f_{L1}t + \theta_{L1}) + \sqrt{2P_{Y1}}D(t)y(t) \sin(2\pi f_{L1}t + \theta_{L1}) \quad (7.1)$$

$$s_{L2}(t) = \sqrt{2P_{Y2}}D(t)y(t) \sin(2\pi f_{L2}t + \theta_{L2}) \quad (7.2)$$

On remarque qu'il y a une addition sur $s_{L1}(t)$. Le terme de gauche, d'amplitude $\sqrt{2P_C}$ est le signal dédié aux civils, s_c , le membre de droite étant le signal militaire, s_m . $D(t)$ est le message de navigation et $x(t)$ est le code qui sert à mesurer la distance sur la plupart des récepteurs, selon la mesure de code que nous allons voir plus loin. $\cos(2\pi f_{L1}t + \theta_{L1})$ représente l'onde porteuse (idem avec la fonction sinus).

Malgré le fait qu'il y ait deux signaux sur L1, il n'est pas difficile pour un récepteur de séparer le signal militaire s_m du signal civil s_c , car s_m et s_c sont en quadrature de phase (l'utilisation de la fonction sinus et cosinus induit un décalage de 90°) et $x(t)$ et $y(t)$ ne sont pas égaux.

Le message de navigation $D(t)$ et x ou $y(t)$ sont formés de séquences de bits rectangulaires d'amplitude ± 1 . $D(t)$ a un débit de 50 bits par secondes (=50 bps), ce qui signifie qu'un bit a une durée de 20 ms, ce qui est assez lent. En revanche, x ou $y(t)$ ont un débit plus rapide. Pendant que $D(t)$ fait un bit, $x(t)$ transmet 20'460 chips (on parle en chips pour x et $y(t)$, mais un bit ou un chip représentent les deux la même chose).

Afin de moduler le message de navigation, $x(t)$ ou $y(t)$, sur la porteuse, le GPS emploie la modulation BPSK (Binary Phase Shift Keying). Cette modulation inverse l'onde porteuse à **chaque changement de bit** ou de chip, tel que nous pouvons le voir sur la figure 7.1. Sur cette illustration, j'ai représenté la modulation de la porteuse par les deux messages : $x(t)$ ou $y(t)$ et $D(t)$.

Maintenant, nous allons regarder les propriétés de chacune des composantes des signaux GPS.

7.1.1 Le message de navigation, $D(t)$

Le message de navigation est constitué des informations sur le satellite qui les envoie. Il est envoyé à 50 bps. Ce message peut être divisé en 25 trames de 5 unités. En effet, une trame contient une partie concernant la santé du satellite et les corrections d'horloge, la deuxième et la troisième partie contiennent les éphémérides du satellite. La quatrième partie contient un modèle ionosphérique, les différences entre le GPST et le temps UTC aussi qu'une partie d'un almanach contenant des informations grossières sur les orbites de l'ensemble des satellites. La cinquième partie contient également une partie de cet almanach. Le message complet de navigation contient 25 fois ces 5 parties. Il dure donc 12 minutes 30. Les unités 1 à 3 se répètent les 25 fois et les 25 parties 4 et 5 contiennent l'almanach entier.

7.1.2 $x(t)$ et $y(t)$

Nous allons, ici, nous intéresser plus précisément au code $x(t)$, que nous appellerons désormais le code C/A (Coarse/Acquisition), ce qui signifie en français "grossière acquisition", car il est à la base de la mesure de code, qui est la technique de positionnement employée le plus souvent par les récepteurs des civils.

Le code C/A est périodique tous les 1023 chips. Il est généré par deux séquences m (maximal length linear shift register), qui forment l'ensemble des codes C/A. Chaque satellite a son propre code C/A. Une séquence m est une suite de 1023 "1" ou "-1"

A la base de tous les codes C/A, se trouvent deux uniques séquences m , qui sont multipliées l'une par l'autre en formant une troisième séquence m , qui peut elle-même être multipliée par la première séquence pour en former une quatrième... Je vais illustrer la génération de séquences m en partant de deux séquences de 5 chiffres, u_1 et u_2 :

$$u_1 = 1 - 1 1 1 - 1 \quad u_2 = -1 - 1 - 1 1 - 1$$

$$u_3 = u_1 \cdot u_2$$

$$u_3 = -1 1 - 1 1 1$$

$$u_4 = u_3 \cdot u_1$$

$$u_4 = -1 - 1 - 1 1 - 1$$

Maintenant, il ne reste plus qu'à effectuer toutes les combinaisons possibles pour avoir l'ensemble des séquences. En remplaçant les -1 par des 1 et les 1 par des zéros, on obtient une séquence binaire, qui pourra être modulée en BPSK.

Les séquences m utilisées par le GPS sont appelées Gold sequences, ou séquences d'or en français. Les propriétés de ces séquences sont les suivantes :

- L'ensemble des séquences possibles générées par deux séquences de N chiffres doit être $N+2$, soit dans le cas du GPS, 1025 Gold séquences ;
- Les Gold séquences utilisées par chaque satellites ont une corrélation croisée très petite, c'est-à-dire que chaque séquence se différencie d'une autre, même si elles sont décalées dans le temps ;
- Ces séquences ont aussi une autocorrélation qui permet facilement au récepteur de déterminer le décalage entre la séquence qu'il génère et la séquence qu'il reçoit (cf. section Mesure de code)

Nous allons regarder un peu le code $y(t)$, qui est aussi appelé code P (Precise), par opposition au code C/A. Ces deux codes ont une structure analogue (les deux utilisent les Gold séquences), mais diffèrent sur la longueur du code et son débit. En effet, alors que le code C/A ne dure qu'une milliseconde avant de se répéter, le code P met une semaine ! De plus, le code C/A débite à 1,023 Mbps alors que le code P débite dix fois plus vite, soit 10,23 Mbps.

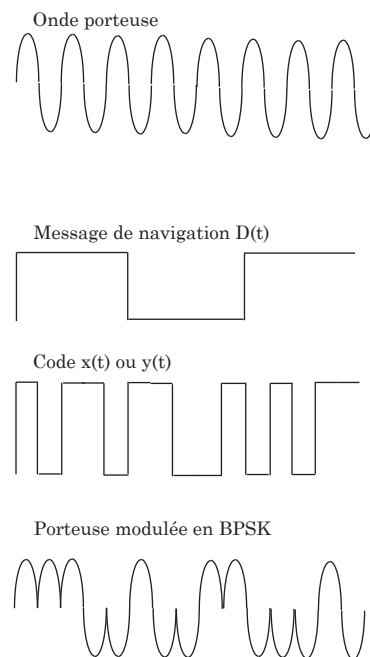


FIGURE 7.1 – Modulation BPSK

Le code P est, comme je l'ai dit précédemment, avant tout développé pour les militaires. Il est muni de l'AS (Anti-Spoofing)

Les séquences du GPS sont aussi appelées séquences PRN (Pseudo-Random Noise) du fait de leurs structures qui semblent aléatoires.

7.2 Fonctions d'autocorrélation et de corrélation croisée

Dans la section précédente, j'ai parlé de corrélation de manière succincte. Toutefois, comme la corrélation est à la base de la mesure du temps, je vais mieux la présenter.

La corrélation est une fonction permettant, dans notre cas, d'aligner deux fonctions différentes. En effet, un récepteur génère les différentes séquences PRN des satellites et, lorsqu'il capte un signal, après avoir démodulé la porteuse, il doit déterminer à quel satellite appartient telle séquence, ainsi que déterminer le décalage du signal par rapport à la séquence générée. En effet, comme théoriquement, l'horloge du satellite et celle du récepteur sont synchronisées, **le décalage mesuré, τ sera égal au temps de parcours du signal en modulo T** (la période du signal).

Pour déterminer à quel satellite appartient la séquence PRN et τ , il faut procéder en deux parties en utilisant la fonction de corrélation. La corrélation croisée, qui est la corrélation entre deux fonctions différentes, permet de déterminer de quel satellite est envoyé le signal et l'autocorrélation permet de déterminer τ . Bien que je parle de deux types de corrélations différents, la fonction employée est la même. La fonction de corrélation $R(t)$ de la séquence W d'un satellite k avec une autre séquence W_a décalée de τ et de période T en fonction du temps t , vaut :

$$R(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T W_k W_a \, dt$$

Faisons, par exemple, la fonction d'autocorrélation d'une fonction sinusoïdale.

$$W = \sin(2\pi t) \quad \text{et} \quad W_a = \sin(2\pi(t - \tau))$$

La fonction d'autocorrélation de W vaut :

$$R(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T \sin(2\pi t) \sin(2\pi(t - \tau)) \, dt$$

$$R(\tau) = \frac{1}{4\pi} (2\pi T - \sin(2\pi T) \cos(2\pi T)) \cos(2\pi \tau) - \frac{1}{8\pi^2} \sin(2\pi \tau) \sin^2(2\pi T)$$

La fonction $\sin(2\pi t)$ a une période T de 1. On peut donc passablement simplifier l'équation précédente :

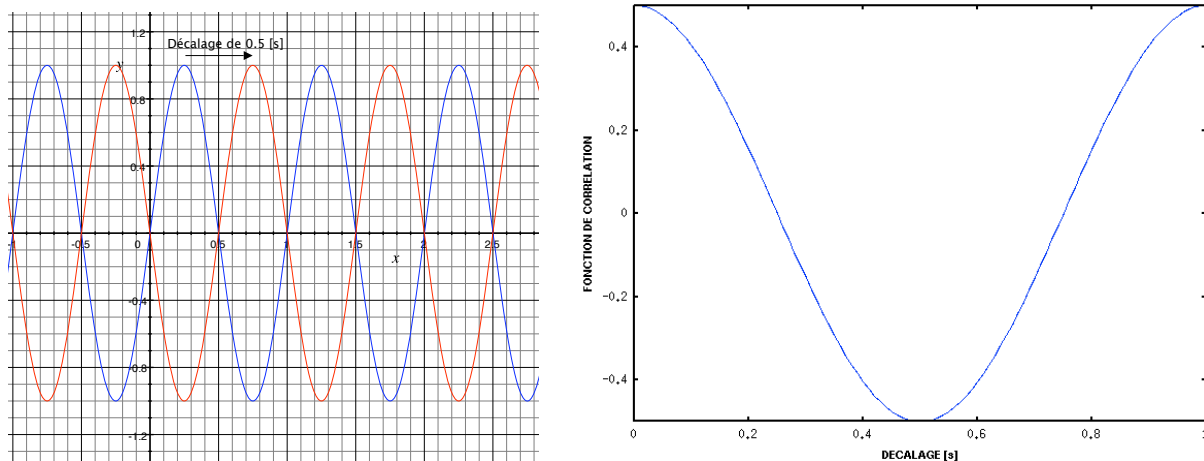
$$R(\tau) = \frac{\cos(2\pi \tau)}{2}$$

La figure 7.2 montre, à gauche la fonction W en bleu et la fonction W quand τ vaut 0,5 [s], en rouge. À droite se trouve la fonction d'autocorrélation de W . On peut remarquer qu'elle prend la valeur maximale lorsque τ vaut 0 ou 1 et que sa valeur minimale est quand τ vaut 0,5. C'est comme cela que la mesure de phase dont nous parlerons plus tard s'effectue. Maintenant, les séquences PRN ont des fonctions de corrélation croisée et d'autocorrélation qui permet au récepteur de déterminer rapidement à quel satellite appartient tel ou tel signal et de déterminer le décalage entre les deux séquences.

La figure 7.3 est la fonction d'autocorrélation d'une partie d'une séquence PRN d'un satellite du système de positionnement européen, Galileo. J'ai sélectionné les 10 premiers chiffres de cette séquence :

$$1 \ 1 \ -1 \ -1 \ 1 \ 1 \ -1 \ -1 \ -1 \ -1$$

En abscisse, il y a le décalage en bit (c'est une séquence binaire) et en ordonnée la corrélation. Quand le décalage vaut 10 bits, la corrélation vaut 1, car la séquence est périodique tous les 10 bits. Les deux séquences sont alors alignées. On remarque sur la figure 7.3 que la fonction d'autocorrélation ne prend que quatre valeurs, 1, 0,2, -0,2 et -0,6. C'est une propriété que partagent toutes les séquences PRN utilisées

FIGURE 7.2 – x (bleu) et sa fonction d'autocorrélation

pour le GPS et pour les autres systèmes de positionnement.

Il est plus simple de comprendre le principe de corrélation avec une séquence PRN, car elle est binaire : La corrélation peut être traduite, pour une séquence binaire, par la somme des bits alignés N_o moins les bits non alignés N_n , le tout divisé par la période en bit.

$$R(\tau) = \frac{N_o - N_n}{T \text{ [bit]}}$$

Pour une séquence parfaitement alignée, N_n est nul et N_o vaut T . La corrélation vaut alors 1.

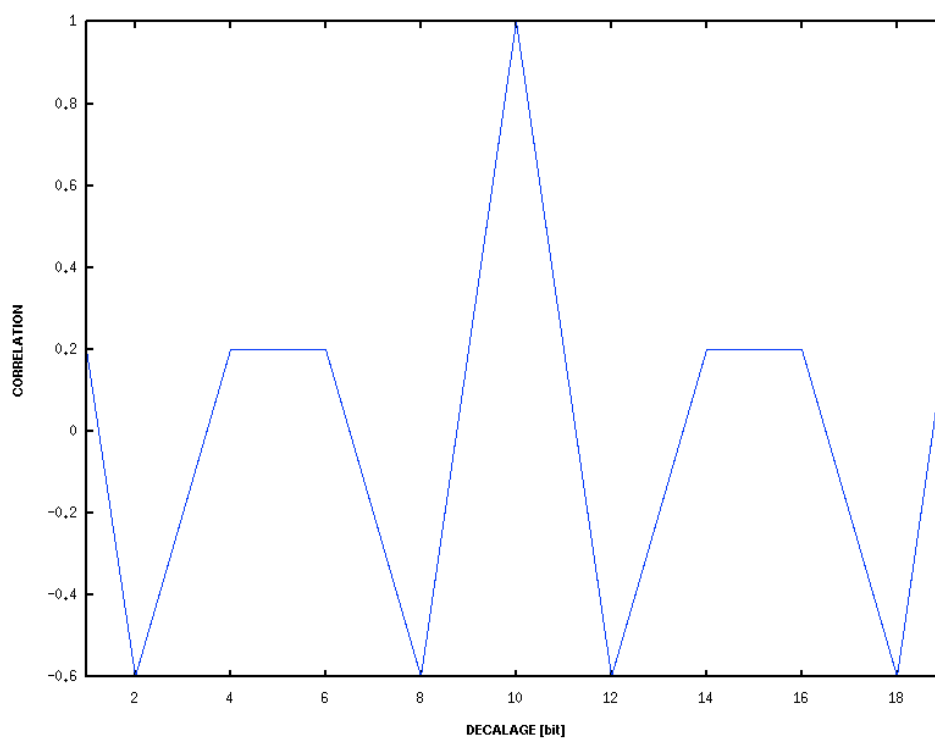


FIGURE 7.3 – Autocorrélation d'une séquence PRN

7.3 Mesure de la distance

Nous avons vu au chapitre 5 comment il est possible de calculer sa position tout en connaissant les distances nous séparant des satellites. Dans cette section, nous allons voir comment cette distance est calculée, d'abord de façon générale et finalement de deux manières plus détaillée en présentant la mesure de code et la mesure de phase. Nous allons reprendre la notation vue au chapitre 5. La distance ρ_k qui sépare le récepteur r du $k^{\text{ième}}$ satellite s_k se calcule à l'aide du temps de parcours T multiplié par la vitesse de la lumière dans le vide, c . Malheureusement, le temps n'est pas donné aussi simplement que sur un chronomètre. En effet, la précision est de rigueur, aussi faut-il prendre en compte la moindre petite erreur d'horloge qui sera nommée δt_s pour le satellite et δt_r pour le récepteur. Ces erreurs varient avec le temps, aussi t_s est l'heure de départ du signal, contenue dans le message envoyé par le satellite. Le temps de transit $\mathcal{T}$, le temps qu'a mis le message pour arriver est l'inconnue principale.

$$\rho = c \cdot \mathcal{T}$$

Or, $\mathcal{T}$ est la différence entre l'heure d'arrivée t_r et l'heure de départ t_s .

$$\rho = c \cdot [t_r - t_s]$$

Toutefois, l'horloge du satellite ainsi que l'horloge du récepteur ont des erreurs, des dérives qui varient en fonction du temps t . Elles s'appelleront respectivement δt_s et δt_r . Nous pouvons aussi écrire que t_s vaut $t - \tau$, où $\mathcal{T}$ est le temps de transit du message. Aussi, t_r vaut simplement t plus la dérive d'horloge δt_r :

$$\rho(t) = c \cdot [t + \delta t_r(t) - (t - \mathcal{T}) + \delta t_s(t - \mathcal{T})]$$

$$\rho(t) = c \cdot [\mathcal{T} + \delta t_r(t) + \delta t_s(t - \mathcal{T})]$$

Comme je l'ai dit plus haut, le terme $\delta t_s(t_{\mathcal{T}})$ ne pose pas vraiment de problème si l'on connaît le temps de transit, τ . En effet, les satellites envoient dans le message de navigation 4 paramètres permettant au récepteur de déterminer $\delta t_s(t_{\mathcal{T}})$, plus les informations nécessaires pour éventuellement effectuer une correction relativiste, ce que nous verrons dans le chapitre suivant. Nous pouvons aussi rajouter des corrections métriques à propos des perturbations engendrées par l'ionosphère I_ρ et la troposphère T_ρ à notre modèle de ρ , corrections que nous verrons aussi plus loin. Une erreur non modélisée, ϵ_ρ s'ajoute. Cette erreur est traduite par le terme b que nous avons ajouté dans le chapitre sur le calcul de la position.

$$\rho(t) = c \cdot [\mathcal{T} + \delta t_r(t) + \delta t_s(t - \mathcal{T})] + I_\rho + T_\rho + \epsilon_\rho$$

Nous allons mettre le terme $c \cdot \tau$ sous la forme de r , car les mesures des satellites ne donnent jamais directement τ , ainsi que nous allons le voir avec la mesure de code.

$$\rho(t) = r + c \cdot [\delta t_r(t) + \delta t_s(t - \mathcal{T})] + I_\rho + T_\rho + \epsilon_\rho$$

Maintenant que nous avons modélisé la distance de parcours ρ , malheureusement avec plusieurs termes, nous allons voir deux méthodes permettant de déterminer la distance r .

7.3.1 Mesure de code

Un des moyens de déterminer le temps de transit est la mesure de code. Elle est une méthode totalement basée sur la mesure du code C/A et des propriétés spécifiques de corrélation croisée et d'autocorrélation des gold séquences.

En effet, nous avons vu que chaque satellite avait une propre séquence PRN. Un récepteur effectuant la mesure de code génère, en synchronisation avec son horloge, chacune des séquences PRN. Lorsqu'il commence à capter un signal C/A d'un satellite, le récepteur peut déterminer le décalage entre le code qu'il génère et le code reçu grâce à la fonction de corrélation. En effet, en faisant varier de façon connue un décalage temporel sous forme de fraction de code Δ_C du code C/A qu'il génère, il arrive à aligner les deux codes. Le récepteur "voit" que les deux codes sont alignés si la corrélation vaut 1. Malheureusement, le code C/A, qui est périodique toutes les millisecondes a effectué un nombre entier N de cycles (N s'appelle l'ambiguïté entière) avant d'être capté par le récepteur. En fait, le Δ_C correspond au nombre

de cycles effectués par le code C/A modulo une milliseconde.

Par conséquent, le temps de transit $\mathcal{T}$ vaut :

$$\mathcal{T} = N \cdot T + \tau$$

Où T est la période du code ou de la porteuse.

En multipliant Δ_C par la longueur du code C/A, qui est de 300 km (la distance parcourue par la lumière en une milliseconde), nous avons la distance séparant le récepteur du satellite en modulo 300 km.

$$\Delta_C \equiv r \pmod{300 \text{ km}}$$

Nous ne pouvons pas dire que cette mesure du code C/A est pratique, car l'ambiguïté entière N reste une inconnue, à moins que l'on connaisse sa position à plus ou moins 300 km. En revanche, avec la mesure du code P, il n'y a aucun souci, car sa période est d'une semaine, ce qui veut dire que l'ambiguïté entière devient un problème seulement si le récepteur sort du système solaire. Toutefois, la mesure du code P n'est pleinement disponible que pour le PPS. Toutefois, les fabricants de récepteurs arrivent à contourner la difficulté. Nous verrons à la section suivante que l'ambiguïté entière reste un problème pour la mesure de phase.

7.3.2 Mesure de phase

La mesure de phase est la méthode la plus précise possible. Elle se base, contrairement à la mesure de code, sur les cycles de la porteuse. Les porteuses, comme nous l'avons vu, ont des fréquences de l'ordre du millier de MHz. Ces différentes fréquences nous donnent des longueurs d'ondes de l'ordre de la vingtaine de centimètres(cf. table 7.1). Nous avons vu en 7.1 que les signaux étaient modulés sur des ondes porteuses

Onde	Fréquence [MHz]	Longueur d'onde [m]
L1	1572,42	0,19
L2	1227,6	0,24
L5	1176,3	0,25

TABLE 7.1 – Les différentes ondes porteuses et leurs caractéristiques physique

sinusoïdales. Pendant le voyage de l'onde, du satellite au récepteur, l'onde a effectué un certain nombre entier de cycles N , qui ne peut pas être mesuré, ainsi qu'une fraction de cycle qui peut être connue. C'est cette fraction de cycle qui est à la base de la mesure de phase.

La phase ϕ est l'angle de décalage de l'onde sinusoïdale (périodique dès que l'angle vaut 2π). On l'exprimera dans cette partie en fraction de cycles.

La mesure de phase s'effectue exactement comme la mesure de code : des ondes porteuses (L1, L2 et L5) sont générées par le récepteur. Ce dernier mesure le décalage entre la porteuse générée par le satellite et celle du récepteur. Ce décalage s'appelle la différence de phase.

Soit l'onde porteuse reçue au temps t avec la phase $\phi_r(t)$ et l'onde porteuse au moment de son envoi, à l'heure $t - \tau$ (τ est le temps de transit du signal) avec la phase ϕ_s . La phase $\phi(t)$ vaut alors :

$$\phi(t) = \phi_r(t) - \phi_s(t - \tau) + N$$

Le problème est que N est inconnue et, du fait de la petite longueur d'onde des porteuses, il est encore plus ambigu qu'auparavant. Il existe cependant une méthode simple pour bénéficier de la précision de la mesure de phase. Il s'agit de mesurer en continu la phase. Alors, entre deux mesures effectuées à t_1 et à t_0 , si on effectue la différence, on obtient :

$$\phi(t_1) - \phi(t_0) = [\phi_s(t_1) - \phi_s(t_0)] - [\phi_r(t_1) - \phi_r(t_0)]$$

On remarque que l'ambiguïté entière a disparu, mais le revers de la médaille est qu'il faut constamment mesurer la phase. Cela est quand même pratique pour un géomètre, par exemple, car il n'a qu'à allumer son récepteur sur une station de référence dont les coordonnées sont connues. Le récepteur détermine N , puis le géomètre n'a qu'à se balader avec son GPS et effectuer ses mesures précises...

Comme nous l'avons vu précédemment, il est nécessaire de prendre en compte les erreurs des horloges, de

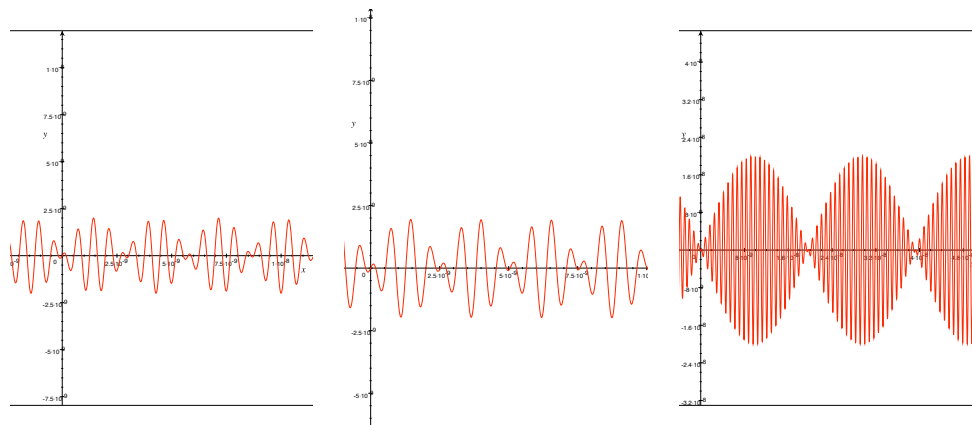


FIGURE 7.4 – Différences entre différentes ondes porteuses (L1-L2, L1-L5 et L2-L5, de gauche à droite)

la troposphère et de la ionosphère. Elles peuvent être rajoutées dans notre équation sous forme de cycles à ajouter ou enlever, mais ces corrections sont de la même forme que celles que nous avons en 7.3. Nous n'allons donc pas les mettre dans cette équation. Toutefois, il réside toujours une erreur, que nous allons appeler ϵ_ϕ :

$$\phi(t_1) - \phi(t_0) = [\phi_s(t_1) - \phi_s(t_0)] - [\phi_r(t_1) - \phi_r(t_0)] + \epsilon_\phi$$

Nous arrivons maintenant à un grand problème : la mesure de phase est victime de sa précision. En effet, comme nous arrivons à une mesure de l'ordre de la fraction de cycle, ce qui se traduit sur le terrain par une mesure à la fraction de λ près qui vaut 20 centimètres, il y a de forte chance que le terme ϵ_ϕ soit supérieur à $\phi(t_1) - \phi(t_0)$. Comme la phase est traquée continuellement, un décalage de l'ambiguïté entière peut se créer et faire qu'après 10 minutes de fonctionnement, N soit augmenté de quelques unités, ce qui nous ferait à nouveau perdre l'avantage de la mesure de phase : la précision.

Effectivement, à cause de la faible longueur d'onde des porteuses, le récepteur peut vite perdre en précision. Une alternative à ce problème est d'augmenter la longueur d'onde. Pour ce faire, il suffit de faire la différence entre deux ondes. Reprenons le tableau vu précédemment et ajoutons y les différences entre les porteuses. Il peut paraître étonnant que la longueur d'onde soit ainsi modifiée. Toutefois, il s'agit d'un

Onde	Fréquence [MHz]	Longueur d'onde [m]
L1	1572,42	0,19
L2	1227,6	0,24
L5	1176,3	0,25
L1-L2	344,82	0,87
L2-L5	51,3	5,85
L1-L5	396,12	0,75

TABLE 7.2 – Différences entre les porteuses

motif périodique se répétant tous les 75, 87 ou tous les 5,85 m. J'ai dessiné les graphes de L2-L5, L1-L5 et de L1-L2 (figure 7.4) . On se rend vite compte de la présence d'un motif périodique.

Nous allons voir comment mettre à profit le fait d'effectuer ces différences et augmentations de la longueur d'onde pour éliminer l'ambiguïté entière. Le principe de base est de commencer avec une estimation de la position plutôt faible du point de vue de la précision et de, de fil en aiguille, déterminer la valeur de l'ambiguïté entière sur L1, N_1 , afin de profiter de la finesse de la mesure de phase sur L1. Ce processus en plusieurs opération s'appelle la **triple différence**.

Commençons par une estimation de ρ avec une mesure de code sur L5, ρ_5 (un militaire peut effectuer les mêmes opérations en commençant par une mesure sur le code P). Nous pouvons appliquer ce que nous avons vu en 7.3 pour la mesure de phase :

$$\rho = \lambda \cdot [N + \phi]$$

En commençant avec une mesure de code sur L5 et en appliquant l'équation précédente avec la fréquence L2-L5, nous aurons :

$$\frac{\rho_5}{\lambda_{25}} = N_{25} + \phi_{25}$$

Nous connaissons ρ_5 et ϕ_{25} vaut $\phi_2 - \phi_5$. Tout s'arrange : la seule inconnue est N_{25} !

$$N_{25} = \frac{\rho_5}{\lambda_{25}} - \phi_2 + \phi_5$$

Par définition, N est un nombre entier. Il faut donc extraire la partie entière :

$$N_{25} = \left[\frac{\rho_5}{\lambda_{25}} - \phi_2 + \phi_5 \right]_{\text{partie entière}}$$

Nous avons maintenant la précision de la mesure de phase sur L25 et, pour la première fois une ambiguïté résolue d'une manière permettant une mesure de phase en allumant son récepteur dans un endroit aux coordonnées inconnues. Toutefois, pourquoi se priver de la plus grande précision de L1 ? Pour profiter de L1, il suffit de recommencer comme avant, sauf que nous avons une distance récepteur satellite à la précision de L25, ρ_{25} .

$$\rho_{25} = \lambda_{25} \cdot [N_{25} + \phi_2 - \phi_5]$$

En appliquant la même stratégie qu'avant, on trouve :

$$N_{12} = \left[\frac{\rho_{25}}{\lambda_{12}} - \phi_1 + \phi_2 \right]_{\text{partie entière}}$$

$$\rho_{12} = \lambda_{12} \cdot [N_{12} + \phi_1 - \phi_2]$$

$$N_1 = \left[\frac{\rho_{12}}{\lambda_1} - \phi_1 \right]_{\text{partie entière}}$$

Finalement, nous avons notre mesure de phase sur L1 tout en ayant résolu l'ambiguïté entière. Le récepteur peut donc mesurer la distance qui le sépare du satellite avec la plus grande précision possible.

Chapitre 8

Problèmes physiques

Aux chapitres précédents, nous avons souvent traité des mesures comme si elles étaient parfaites, à l'abri des phénomènes physiques. Malheureusement, les phénomènes physiques doivent être pris compte avec une grande précision. En effet, à quoi bon avoir une mesure de phase précise à moins de 20 centimètres près si on a une incertitude de 5 mètres à cause de l'atmosphère ? A la section 7.1, nous avons vu qu'il fallait prendre en compte la ionosphère et la troposphère dans les mesures. Mais que sont ces erreurs et pourquoi ont-elles une influence sur les mesures GPS ?

L'atmosphère, l'ensemble du gaz entourant la Terre est séparée en plusieurs couches, dont la troposphère et la ionosphère.

La troposphère est la couche la plus proche de la Terre. Elle s'étend du sol à une altitude allant jusqu'à 16 kilomètres d'altitude. C'est dans cette couche que se propagent les nuages, les orages, les fronts secs, les fronts humides. C'est elle qui décide du temps et du climat. C'est donc une couche particulièrement instable. La variation d'humidité de l'air induit un changement de l'indice de propagation des ondes dans le milieu et doit, par conséquent être pris en compte avec le GPS.

La ionosphère est une couche s'étendant d'environ 70 km d'altitude jusqu'à plus de 1000 kilomètres contenant de l'air ionisé par le rayonnement UV de notre soleil. Le plasma ainsi formé a des effets non négligeables sur les ondes électromagnétiques, ce qui est particulièrement dommageable pour le GPS qui est basé sur la lectures de telles ondes.

Voici déjà deux problèmes physiques dont nous allons voir la gestion dans le cas du GPS. D'autres problèmes non négligeables, puisqu'au cœur même du système GPS se trouve le temps, sont la relativité restreinte et d'autres corrections temporelles que nous verrons.

Ce chapitre va traiter de la gestion de ces trois problèmes et finir par d'autres effets non modélisables ou, du moins, non mesurables.

8.1 Problèmes temporels

8.1.1 Relativité restreinte

La relativité restreinte, le célèbre postulat d'Einstein, dit que l'espace-temps se déforme en fonction de la vitesse de l'observateur. La relativité est négligeable dans la vie de tous les jours, mais dans le cas du GPS, il faut, premièrement, un temps extrêmement précis et, deuxièmement, les satellites se déplacent à des vitesses considérables, ce qui apporte une correction relativiste sur le temps des horloges embarquées à bord des satellites.

Nous pouvons facilement calculer la vitesse des satellites : ils ont une trajectoire quasi circulaires, ils sont à une altitude d'environ 20'000 km (26'400 km depuis le centre de la Terre) et ils ont une période de rotation de 12 heures environ.

$$v_{sat} \simeq \frac{2\pi \cdot 26'400'000}{12 \cdot 60 \cdot 60} \simeq 4'000 \text{ [m/s]}$$

Pour trouver la correction sur le temps, nous allons employer la contraction de Lorentz-FitzGerald. Cette contraction a été découverte bien avant les travaux d'Einstein, mais les travaux d'Einstein justifient celle-ci. La contraction de Lorentz-FitzGerald dit que tout corps qui se déplace avec une vitesse v subit une

contraction dans le sens de son mouvement d'un facteur α_R . Ce facteur vaut :

$$\alpha_R = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

En remplaçant v par v_{sat} , on trouve :

$$\alpha_R = 0,999999999919778$$

La correction s'effectue sur la fréquence fondamentale f du récepteur GPS, qui est de 10,23 MHz. Il faut donc diminuer la fréquence fondamentale d'un facteur Δf :

$$\Delta f = f - \alpha_R \cdot f \simeq 0,00082[\text{Hz}]$$

Cette correction devrait suffire si les orbites des satellites étaient vraiment circulaires. Toutefois, les orbites ne le sont pas. Des corrections personnalisées pour chaque satellites sont envoyées dans le message de navigation et dans l'almanach.

8.1.2 Blueshift gravitationnel

Un autre effet sur le temps est le blueshift (décalage dans le bleu) gravitationnel. Les photons tombant vers la Terre gagnent de l'énergie, à cause de leur perte d'énergie potentielle, mais ne peuvent pas gagner d'énergie cinétique, car ils sont déjà à la vitesse de la lumière, qui est une constante. Ce surplus d'énergie induit une augmentation de sa fréquence :

$$E = hf$$

où h est la constante de Planck. Cela veut dire que si l'énergie augmente d'un facteur β , la fréquence augmente du même facteur β .

La somme de toutes ces corrections temporelles fait que la fréquence fondamentale des horloges des satellites est fixée 0,0045674 Hz plus faible que 10,23 MHz. Grâce à ces corrections, les récepteurs reçoivent bien les ondes aux fréquences qui leur sont demandées.

8.2 Correction ionosphérique

Comme nous l'avons vu précédemment, l'air se fait ioniser par le rayonnement UV émis par notre soleil en formant du plasma, qui est conducteur. Le fait que le plasma soit conducteur gêne les ondes électromagnétiques et devient un milieu dispersif pour les ondes.

Une mesure utile pour connaître la dispersion de l'onde est le TEC (Total Electron Content) qui correspond à :

$$\text{TEC} = \int_{\text{récepteur}}^{\text{satellite}} n(l) dl$$

où n est l'indice de réfraction du milieu.

L'incidence de la ionosphère sur la phase I_ϕ vaut :

$$I_\phi = -\frac{40,3 \cdot \text{TEC}}{f^2}$$

Avant que la fréquence civile L5 n'existent, les récepteurs civils qui ne pouvaient se satisfaire que de L1 recevaient les paramètres d'un modèle du TEC en fonction de l'heure de la journée (le modèle de Klobuchar), qui étaient tirés de certains offices météorologiques. Maintenant, avec la mesure bi-fréquence, les récepteurs peuvent mesurer le TEC. C'est le GPS qui envoie les valeurs de TEC aux météorologues et scientifiques qui peuvent dresser la carte du TEC et ainsi mieux comprendre notre planète. C'est une des multiples conséquences positives du GPS.

8.3 Correction troposphérique

La variation d'humidité de la troposphère induit des changements sur l'indice de réfraction de l'air. Initialement, l'indice de l'air vaut environ 1,0003 au niveau de la mer et varie en fonction des conditions météorologiques du lieu.

Malheureusement, la déviation troposphérique ne dépend pas de la fréquence comme pour la ionosphère, ce qui fait qu'elle ne peut pas être éliminée par une mesure bi-fréquence. Les récepteurs doivent donc intégrer un modèle de la déviation métrique en fonction de l'altitude, la pression, l'humidité et la température.

8.4 Autres problèmes physiques

Dans le chapitre sur le traitement du signal, nous avons toujours visualisé de belles ondes sinusoïdales bien nettes. Toutefois, dans la réalité, le récepteur ne capte qu'un signal très bruité. Une des raisons à ce bruit est la faible puissance des ondes GPS. Sinon, les signaux n'arrivent pas tous en droite ligne depuis le satellite. Les ondes peuvent se réfléchir contre une paroi, des arbres avant d'être captées par le récepteur. Ce phénomène s'appelle le multipath (plusieurs chemins).

La parade au bruit et au multipath est dans la structure du récepteur : l'électronique. En effet, un récepteur n'est pas qu'une simple antenne, mais une électronique sophistiquée qui "nettoie" le signal.

Chapitre 9

Conclusion

Dans ce travail, j'ai parlé de la structure du système GPS, le système américain de positionnement, de sa composition et surtout de son fonctionnement. J'ai premièrement survolé le système américain, tout en parlant un peu des systèmes concurrents. Ensuite, j'ai parlé des orbites et des positions des satellites, ce qui permet de mieux comprendre le fonctionnement des almanachs. Ensuite, j'ai montré comment on peut déterminer sa position grâce à des distances dans un système cartésien et les formules de conversion pour arriver à une position exprimée en latitude, longitude et altitude. Plus loin, j'ai présenté un programme effectuant lui-même les calculs de la position à partir des distances. Pour expliquer la mesure des distances, j'ai ensuite dédié une partie de ce travail au traitement de signal et finalement aux problèmes physiques qui interviennent dans le cas des systèmes de positionnement par satellite, ainsi que leur gestion.

On peut tirer de ce travail la part très importante des mathématiques dans les systèmes de positionnement, ainsi que la gigantesque part de la physique, dès que l'on exploite beaucoup de précision. J'ai peu parlé des applications du GPS, car c'est un sujet qui est en constante évolution. En effet, initialement prévu pour la localisation, le GPS s'est retrouvé un des meilleur terrain de vérification de la relativité restreinte, sert à mesurer les déplacements des montagnes, des collines et peut même donner des renseignements quant à l'ionisation des particules dans l'atmosphère !

De manière plus personnelle, ce travail m'a beaucoup appris. J'ai appris de nouveaux outils mathématiques et physiques et j'ai surtout été initié à la programmation, au traitement du signal et à l'édition avec Latex. Sinon, j'ai eu beaucoup de plaisir à comprendre le fonctionnement de base du GPS, qui tend à devenir quotidien, car c'est génial de pouvoir regarder un objet (un récepteur dans ce cas) en sachant plus ou moins ce qui se trouve derrière, du point de vue du fonctionnement, autant que du point de vue structurel (les satellites, les stations au sol...).

Malgré le plaisir que j'ai eu en pensant à l'immense portée du point de vue des applications, effectuant ce travail, un point m'a interpellé. Il ne s'agit pas du GPS lui-même, mais de la course aux systèmes de navigations. Les Etats-Unis, l'Europe, la Russie, la Chine, l'Inde et le Japon se dotent ou ont leur propre système pour des questions surtout politiques et parfois pratiques. L'envoi de tous ces satellites dans l'espace pollue beaucoup, alors qu'un seul système de positionnement universel, sous la direction de l'ONU, par exemple, doté de stations au sol pourrait avoir la même précision et limiter le gaspillage.

Chapitre 10

Bibliographie et Remerciements

10.1 Bibliographie

10.1.1 Livres

GLOBAL POSITIONING SYSTEM Signals, Measurements, and Performance, Pratap Misra Per Enge
GLOBAL POSITIONING SYSTEM Signals, Measurements, and Performance Second Edition, Pratap Misra Per Enge
Physique, Eugene Hecht, de Boeck

10.1.2 Sites Internet

<http://www.philateliemarine.fr/astrolabe.htm>
http://www.nga.mil/MSISiteContent/StaticFiles/NAV_PUBS/APN/Chapt-11.pdf
<http://journal.hautehorlogerie.org/fr/passion/point-histoire/longue-quete-du-chronometre-marine.html>
<http://www.astrosurf.com/luxorion/gps.htm>
http://www.microem.ru/pages/u_blox/tech/dataconvert/GPS.G1-X-00006.pdf
<http://www.ipt.univ-paris8.fr/vgodard/enseigne/sig/memosig/mem23sig.htm#wgs>
http://www.gps.oma.be/fr/lbesch_fr_ok_css.htm
<http://www.navcen.uscg.gov/gps/geninfo/IS-GPS-200D.pdf>
<http://www.swisstopo.admin.ch/internet/swisstopo/fr/home/topics/survey/sys/refsys.parsysrelated1.63983.downloadList.8009.DownloadFile.tmp/swissprojectionfr.pdf>
<http://www.lb.auf.org/sammuneh/ch2-1.htm>
<http://www.geologie.ens.fr/vigny/gps-processing-f.html>
<ftp://tycho.usno.navy.mil/pub/gps/gpssy.txt>
<ftp://tycho.usno.navy.mil/pub/gps/gpsb2.txt>
http://gps.ece.cornell.edu/galileo/GIOVE_A_L1C_primary.txt
<http://www.navcen.uscg.gov/gps/pdop.htm>
<http://la.climatologie.free.fr/troposphere/troposphere.htm>
http://www.futura-sciences.com/fr/definition/t/univers-1/d/ionosphere_871/
<http://www.oulu.fi/spaceweb/textbook/ionosphere.html>
<http://www.cnes.fr/web/CNES-fr/860-galileo.php>
<http://www.glonass-ianc.rsa.ru/pls/htmldb/f?p=202:20:10306688586464463085::NO>
http://www.chine-informations.com/actualite/le-chinois-beidou-sort-sa-premiere-puce-de-geolocalisation_8754.html

Image de titre :

http://www.startechoutlet.com/images_products/SPAC_Satellite_GPS_IIF_lg%5B1%5D.jpg

10.2 Remerciements

Je remercie premièrement M. Rimoldi et M. Kleiner de l'EPFL pour nous avoir envoyé des cours, supports de cours et données, ainsi que m'avoir prêté le livre GLOBAL POSITIONING SYSTEM, sans m'avoir jamais vu et sans me connaître.

Je remercie aussi ma tutrice, Mme Rima Halabi Petter qui m'a suivie tout au long de ce travail et qui m'a éclairé sur différents points mathématiques. Je la remercie aussi de l'indépendance qu'elle m'a laissé dans la conduite de mon travail et de la confiance qu'elle m'a faite.

Ma famille mérite aussi de bons remerciements pour le nombre de corrections qu'elle a fait et pour avoir supporté mon enthousiasme débordant à chaque fois que j'apprenais quelque chose qui m'intéressait.

Glossaire et abréviations

a	Semi-grand axe d'une ellipse,
A	Altitude,
b	Semi-petit axe d'une ellipse,
c	Vitesse de la lumière dans le vide, <i>Environ 300'000 km/s</i>
$C/A, code$	Coarse/Aquisition, <i>Code permettant des mesures grossières</i>
DOP	Dilution Of Precision, <i>Dilution de la précision</i>
$ECEF$	Earth Centered, Earth Fixed, <i>système de coordonnée cartésien géocentré</i>
e	Excentricité d'une ellipse,
f	fréquence,
ϕ	Phase (latitude en 5.4),
$GNSS$	Global Navigation Satellite System, <i>système global de navigation par satellite</i>
GPS	Global Positionning System, <i>système de positionnement global</i>
λ	Longueur d'onde (longitude en 5.4),
N	Ambiguïté entière,
$NAVSTAR$	NAVigation System by Timing And Ranging, <i>système GPS américain</i>
ω	Vitesse angulaire,
$P, code$	Precise, <i>Code permettant des mesures précises</i>
PRN	Pseudo-Random Noise, <i>Dans ce cas, séquence binaire pseudo-aléatoire</i>
$\vec{rp}$	Vecteur position du récepteur dans le repère ECEF,
$\vec{sp}_k$	Vecteur position (ECEF) du satellite indice k ,
T	Période,
θ_E	Anomalie excentrique,
θ_M	Anomalie moyenne,
$WGS84$	World Geodetic System 1984, <i>système géodésique 1984</i>